Doktorska disertacija

By: Edin Lidjan

As of: Jan 20, 2022 8:52:38 AM

32,736 words - 76 matches - 54 sources

Similarity Index

4%

Mode: Similarity Report

paper text:

UNIVERZITET CRNE GORE PRIRODNO-MATEMATIſKI FAKULTET Edin Ližan TOPOLO'KE KARAKTERISTIKE POPLOſAVANJA GENERALISANIH POLIOMINIMA -

DOKTORSKA DISERTACIJA- Podgorica , 2022. **UNIVERSITY OF MONTENEGRO FACULTY OF** NATURAL SCIENCES **AND MATHEMATICS** 2

Edin Ližan TOPOLOGICAL CARACTERISTICS OF GENERALIZED POLYOMINO TILINGS -PHD THESIS- Podgorica, 2022. Podaci i informacije o doktorantu Ime i prezime: Edin Ližan Datum i mjesto roženja: 15.12.1986. godine, Cazin, Bosna i Hercegovina Naziv zavr²enog postdiplomskog studijskog programa i godina zavr²etka: Matematika i informatika, 2013 Podaci i informacije o mentoru Ime i prezime: Đorže Barali¢ Titula: doktor matemati£kih nauka Zvanje: vi²i nau£ni saradnik Naziv univerziteta i organizacione jedinice: Matemati£ki institut SANU, Beograd, Srbija ſlanovi komisije: Dr Đorže Barali¢, vi²i nau£ni saradnik, MI SANU, Beograd, Srbija Dr Svjetlana Terzi¢, red. prof. PMF-a, Univerzitet Crne Gore Dr šana Kovijani¢ Vuki¢evi¢, red. prof. PMF-a, Univerzitet Crne Gore Dr Vladimir Bo°ovi¢, red. prof. PMF-a, Univerzitet Crne Gore Dr Rade šivaljevi¢, nau£ni savjetnik MI SANU, Beograd, Srbija Datum odbrane: DD. mjesec 2022. godine Podaci o doktorskoj disertaciji Naziv doktorskih studija: Matematika, Prirodno-matemati£ki fakultet, Univerzitet Crne Gore Naslov disertacije: Topolo²ke karakteristike poplo£avanja genera- lisanih poliominima Rezime: Ova doktorska disertacija je posve¢ena prou£avanju poliomino poplo£avanja topolo²kih povr²i i njihovih osobina. Problemi poliomino poplo£avanja koji su do sada prou£avani uglavnom u ravni su preneseni na topolo²ke povr²i sa kvadratnim mre°ama i razmatrane su opstrukcije za postojanje poplo£avanja i na£ini njihovih ra£unanja. Specijalno je pokazano da je metod homolo²ke grupe poplo£avanja koji je uveo Michael Reid primjenljiv u nekim klasama ovih problema na kvadratno prekrivenim povr²ima. U tezi smo de nisali simplicijalne komplekse poplo£avanja i prou£avali njihove topolo²ke i kombinatorne karakteristike kao ²to su: f i h vektori, povezanost i fundamentalna grupa, homologija i Bettijevi brojevi. Ovi kompleksi su ag kompleksi, a uspostavljeni su i kriterijumi za odrežene klase ovih kompleksa kada su pure, balansirani i Cohen Macualay kompleksi. Za neke simplicijalne komplekse poplo£avanja je potvržena hipoteza da takvi kompleksi imaju homotopski tip ved° sfera, uprkos tome ²to nisu ni Cohen Macualay i time je otvoreno jedno novo podru£je za dalja istra°ivanja u topolo²koj kombinatorici. Klju£ne rije£i: poliomino poplo£avanja povr²i, grupe homologija poplo£avanja, simplicijalni kompleksi poplo£avanja, f vektor, h vektor, pure, ag, balansirani kompleksi, Cohen Macualay kompleksi, fundamentalna grupa, homologija, Bettijevi brojevi, ved° sfera. Nau£na oblast: Kombinatorika U°a nau£na oblast: Topolo²ka kombinatorika UDK bro j: 2 Information on the PhD thesis Course of study: Mathematics, Faculty of Natural Sciences and Mathematics, University of Montenegro Thesis title: Topological caracteristics of generelaized polyomino tilings Summary: This doctoral thesis studies polyomino tilings of topolo- gical surfaces and their properties.

The problems of polyomino tilings have been extensively studied in plane, so they are transferred to square tiled surfaces. Thesis considers obstructions for existence of a tiling and ways for their calculation. It is shown that the method of the homology group of tiling, introduced by Michael Reid in planar case, may be e ective on surfaces as well for some class of problems. Simplicial complexes of polyomino tilings are introduced in the thesis. Their topological and combinatorial characteristics such as: f and h vectors, the homology groups and the Betti numbers, the fundamental group and connectedness are studied. These complexes are ag and criterions for pure, balanced and Cohen Macaulay property of these complexes is established for some particular class of polyomino shapes. For some complexes of tilings it is con rmed the conjecture that such complexes

have the homotopy type of a wedge of spheres , despite not being **a** 19

Cohen-Macaulay. The thesis opens a lot of spaces for further investigations in topological combinatorics. Key words: poliomino tilings (surfaces), homology groups of tilings, simplicial complex of tilings, f vector, h vector, pure, ag, balanced complex, Cohen Macualay complex, the fundamental group, the homology, the Betti numbers, wedge of spheres. Scienti c eld: Combinatorics Science topic: Topological combinatorics UDC: 3 Predgovor Jedan od tradicionalno prou£avanih problema u kombinatorici je problem poplo£avanja. Prou£avanje ovog problema se°e u daleku pro²lost, ali zbog svoje primjene i zna£aja za arhitekturu, umjetnost, kompjutersku gra ku, op- timizaciju i danas je aktuelan. Op¢enito, prou£avanje problema poplo£avanja je NP-te°ak problem. Osnovna ideja prou£avanja ovog problema u disertaciji je primjena algebarske topologije na prou£avanje problema poplo£avanja na topolo²kim povr²ima. Poliomino oblici predstavljaju interesantan alat za prou£avanje, a posebno su od zna£aja prou£avanja njihovih vi²edimenzionalnih analagona. Njihovi analagoni su od posebnog zna£aja u statisti£koj zici i za njih se koristi poseban termin °ivotinje re²etke. Oni se jo² koriste i kao modeli za polimere i pre£i²¢avanje klastera. Prou£avanje poliomino oblika u rekreativnoj matematici je donio velik broj nerije²enih problema, kao ²to je naprimjer problema enumeracije poliomino oblika date veli£ine. Ovi oblici predstavljaju posebnu temu prou£avanja i mnogim matemati- £arima. Od posebnog interesa u kombinatornom smislu matemati£arima su okupili pa°nju prou£avanja slobodnih, ksnih i jednostranih n-omina ([52], [53], [65], [3], [18], [35], [34], [33]). Kasnija istra°ivanja su se bazirala na prou£avanje asimptotskog rasta broja n-omina i odreživanje procjene konstante rasta (engl. growth constante) ([54], [43], [44], [3], [7], [35]). Mno²tvo je problema koji se bave prekrivanjem zadanog regiona sa odreženim poliomino oblicima. Golomb ([25])) je pokazao da je pitanje da li poliomino oblici iz zadanog skupa mogu prekriti ravan neodlu£ivo. Najvi²e je prou£avan problem poplo£avanja pravougaone table pomo¢u poliomino oblika. Rad koji su objavili Conway i Lagarias [17] zasigurno predstavlja jedan od najzna£ajnijih radova u kojem je poliomino oblicima u ravni asocirana grupa. Njihova ideja se ogleda u tome da se svakom poliomino obliku pridru°i odgovaraju¢a rije£, odnosno njeni konjugati koji proizvode relacije. Drugim rije£ima, grupa koja je odrežena datim skupom poliomino oblika je slobodna grupa posje£ena datim relacijama. Conway i Lagarias su pokazali 4 da netrivijalnost rije£i asocirane sa regionom koji °elimo poplo£ati u nekoj reprezentaciji ove grupe predstavlja opstrukciju za tra°eno poplo£avanje. Takva reprezentacija grupe danas se u literaturi naziva homotopskom grupom poplo£avanja i predstavlja najja£i metod za dokazivanje nepostojanja poplo£avanja. Mežutim, homotopske grupe se te²ko ra£unaju i ne postoje njihovi analogoni za primjenu na vi²e dimenzije u poplo£avanjima. S ciljem da olak²a generalizaciju u vi²im dimenzijama poplo£avanja Reid u svom radu [67] uvodi grupu homologija poplo£avanja. Ova grupa u odnosu na homotopsku grupu se lak²e odrežuje, ali predstavlja slabiju invarijantu od nje. Radovi [17] i [67] predstavljaju po£etke primjene algebarske topologije i kombinatorne teorije grupa u prou£avanju problema poplo£avanja poliomi- nima. U literaturi su poznati neki od problema poplo£avanja povr²i [25], [26], [27], [28], a najvi²e je poslije problema poplo£avanja pov²i prou£avano popolo£avanje torusa [51], [67]. U doktorskoj disertaciji uvodimo simplicijalne komplekse asocirane poli- omino poplo£avanjima. Osobine ovih kompleksa su prou£avane u skladu sa poznatim svojstvima simplicijalnih kompleksa ([12], [80], [14], [64]). Sada ¢emo izlo°iti strukturu i dati pregled doktorske disertacije. Di- sertacija je podijeljena na glave, glave na paragrafe, a neki paragra na potparagrafe. Paragrafe smo ozna£ili sa dva broja. Prvi broj ozna£ava glavu, a drugi broj ozna£ava redni broj paragrafa u toj glavi. Potparagraf je ozna£en s tri broja, od kojih prva dva odrežuju broj paragrafa, a tre¢i ozna£ava broj potparagrafa. Numeracije formula, teorema, lema, stavova i de nicija su standardne. Doktorska disertacija se sastoji od £etiri glave. Prva glava doktorske disertacije se sastoji od £etiri paragrafa i daje pregled topologije povr²i koji se odnosi na do sada poznate stvari o topologiji povr²i, a izlo°ena je zbog kompletnijeg i sveobuhvatnijeg razumijevanja prou£avanja problema poliomino poplo£avanja povr²i. Prvi paragraf sadr°i pregled osnovnih de nicija i potparagraf u kojem smo razmatrali na£in nastanka novih topolo²kih povr²i tzv. povezanih suma. U drugom paragrafu smo se bazirali na prou£avanje homomor zama i dokazivanje topolo²kih invarijanti povr²i. Tre¢i paragraf se sastoji od pet potparagrafa u kojima su razmatrane tehnike i svojstva u (re)konstrukcijama novih povr²i: simbol dijagrama povr²i, imenovanje vrhova, redukcija na samo jedan vrh, parovi stranica oblika a a, parovi stranica oblika a a−1. U £etvrtom potparagrafu dali smo de niciju i pregled osnovnih karakteristika translacijskih povr²i. Vezu izmežu grupa homologija i poliomino poplo£avanja dali smo u drugoj glavi doktorske disertacije. Ova glava se sastoji od tri paragrafa. U prvom paragrafu smo dali pregled do sada poznatih istra°ivanja i dobijenih rezultata o poliomino poplo£avanjima u ravni. U drugom paragrafu smo 5 de nisali problem poliomino poplo£avanja na povr²ima sa pregledom do sada istra°enih osobina poliomino poplo£avanja. Problem poliomino poplo£avanja koji M. Reid de ni²e za ravan u [67] prenosimo na prou£avanje klasa problema na povr²ima. Tre¢i paragraf se sastoji od prikaza dokaza novih teorema o nepostojanosti poliomino poplo£avanja na topolo²kim povr²ima. Date probleme smo razmotrili i prou£avali sa aspekta topologije, algebre i kombinatorike i dali generalizacije za cijele klase prou£avanih problema. Posebno su nam bili zanimljivi za prou£avanje problemi na torusu. Pored torusa kreirali smo i nove orijentabilne i neorijentabilne povr²i na kojima smo primijenili i pokazali funkcionalnost izlo°enih tvrdnji i metoda. U tre¢oj glavi doktorske disertacije uvodimo simplicijalne komplekse asocirane sa poliomino poplo£avanjima. Tre¢a glava doktorske disertacije se sastoji od devet paragrafa u kojima smo prou£avali osobine simplicijalnih kompleksa poplo£avanja. U prvom paragrafu tre¢e glave dajemo kratak prikaz osnovnih pojmova vezanih sa simplicijalne komplekse koji su op²te poznati. Drugi paragraf se sastoji od poja²njenja i de nicije simplicijalnog kompleksa poplo£avanja. Pored de nicije i poja²njenja pojmova simplici- jalnog kompleksa poplo£avanja u drugom paragrafu dajemo i poja²njenje uo£enog ag svojstva tako de nisanih simplicijalnih kompleksa. Nadalje, u tre¢em paragrafu se bavimo prou£avanjem f i h vektora simplicijalnih kompleksa poplo£avanja i dajemo op¢e generalizacije za ra£u- nanje istih za bilo koju dimenziju simplicijalnog kompleksa koji je asociran postavljanjem datog poliomino oblika. Pored prou£avanja datih vektora u potparagrafu tre¢eg paragrafa dajemo de niciju i teoremu za primjenu operacije join simplicijalnih kompleksa poplo£avanja te njenu primjenu na neke od simplicijalne kompleksa poplo£avanja. U £etvrtom paragrafu tre¢eg poglavlja smo se bavili prou£avanjem Alexanderove dualnosti simplicijalnih kompleksa poplo£avanja i prikazali na£in primjene iste u programskom paketu Sage 9.0. Na osnovu primjene Alexanderove dualnosti u Sage programu smo uspje²no testirali konkretne simplicijalne komplekse asocirane sa postavljanjem poliomino oblika na kvadratnu mre°u u ravni i kvadratnu mre°u na torusu. Koriste¢i se dobijenim rezultatima u petom paragrafu dajemo generalne dokaze osobine pure datih kompleksa koji su asocirani postavljanjem nekih konkretnih poliomino oblika. 'esti paragraf se sastoji od analize i prou£avanja balansiranih simplici- jalnih kompleksa. Za simplicijalne komplekse poplo£avanja koji su asocirani postavljanjem I omina smo dokazali tvrdnje na kvadratnoj mre°i u ravni i na torusu kada su oni balansirani, a kada nisu. Zatim smo se bavili ra£unanjem grupa homologija i Bettijevih brojeva datih simplicijalnih kompleksa poplo£avanja te smo dobijene rezulate za neke konkretne komplekse dali u osmom paragrafu. 6 U osmom paragrafu tre¢e glave smo prou£avali Cohen Macualay svojstvo simplicijalnih kompleksa poplo£avanja i dali generalne tvrdnje za neke od simplicijalnih kompleksa za koje n su Cohen Macualay, a za koje nisu. Nadalje, u £etvrtoj glavi doktorske disertacije smo se bavili prou£avanjem fundamentalnih grupa datih simplicijalnih kompleksa poplo£avanja, a dobi- jene rezultate smo predstavili u prvom paragrafu. Dali smo dokaz generalne tvrdnje da je fundamentalna grupa simplicijalnih kompleksa koji su asocirani postavljanjem nekog poliomino oblika trivijalna. ƒetvrta glava doktorske disertacije nudi poveznicu i u prou£avanju poliomino poplo£avanja i njihovih homotopskih tipova. Za neke konkretne simplicijalne komplekse poplo£avanja dat je pregled njihove povezanosti i homotopskog tipa. U rezultatima prikazanim u ovoj glavi daje se gneralizacija rezultata do kojih je do²ao Kozlov. Sadr°aji koji su prou£avani i predstavljeni u doktorskoj disertaciji £ine jednu koherentnu cjelinu. Dio rezultata dat u doktorskoj disertaciji je publikovan u £asopisu sa SCI liste u skladu sa Pravilima doktorskih studija Univerziteta Crne Gore: ˆ E. Ližan, Ð Barali¢, Homology of polyomino tilings on at surfaces , Applicable Analysis and Discrete Mathematics, 2021. DOI: https://doi.org/10.2298/AADM210307031L https://arxiv.org/abs/2103.04404 Dio dobijenih rezultata je prezentovan na: ˆ

(Francuska) ˆ Seminaru za topologiju kombinatornih prostora, Annual meeting, MI SANU, Beograd (Srbija) ˆ 2nd Croatian Combinatorial Days, Zagreb (Hrvatska) ˆ Znanstveni seminar: Seminar za kombinatoriku i diskretnu matema- tiku, Prirodno matemati£ki fakultet, Zagreb (Hrvatska) ˆ Heidelberg laureate forum, Heidelberg (Njema£ka) ˆ Studentski seminar, MI SANU, Beograd (Srbija) Na kraju se °elim zahvaliti profesoru Ðoržu Barali¢u na savjetima, sugestijama, postavljenim zadacima i nesebi£noj pomo¢i koju je pru°io tokom pisanja doktorske disertacije. 7 Izvod iz teze Matematika, arhitektura, umjetnost, kompjuterska gra ka, optimizacija i druge nau£ne discipline nude mno²tvo problema koji se svode na rje²avanje problema poplo£avanja. Ovaj problem se uglavnom prou£ava u ravni i kao takav predstavlja NP-te°ak problem. U ovoj doktorskoj disertaciji se prou£ava problem poplo£avanja topolo²kih povr²i poliomino oblicima, te se daju rje²enja za neke klase prou£avanih problema. Conway i Lagarias su dali novu tehniku koja koristi metod grani£ne invarijante za utvrživanje postojanosti poplo£avanja. Njihove rezultate je pro²irio u svom istra°ivanju M. Reid. On je dao najuspje²niji metod za prou£avanje problema poplo£avanja u ravni rade¢i sa grupama homotopija. On je pored grupa homotopija uveo grupe homologija poplo£avanja. U ovoj tezi pro²irujemo Reidova razmatranja i na prou£avanje poplo£ava- nja toplo²kih povr²i poliominima rade¢i sa grupama homologija poplo£avanja i dajemo dokaze (ne)postojanosti poliomino poplo£avanja za cijele klase razmatranih problema. Pored razmatranja poplo£avanja topolo²kih povr²i u doktorskoj disertaciji uvodimo simplicijalne komplekse koji su asocirani postavljanjem poliomino oblika na kvadratnu tablu ili kvadratnu mre°u na topolo²koj povr²i. Takve simplicijalne komplekse smo nazvali simplicijalnim kompleksima poplo£ava- nja. Za uvedene simplicijalne komplekse smo dali razmatranja prou£ava- nja njihovih osobina (ag, pure, balanced, Cohen Macualay, homologija, Bettijevi brojevi, fundamentalna grupa) i razmatranja odrežïvanja za njih speci £nih vektora (f i h vektora). U £etvrtoj glavi doktorske disertacije smo se bavili prou£avanjem poveza- nosti i homotopskih tipova simplicijalnih kompleksa poplo£avanja. Odrežen je homotopskih tip za neke od simplicijalnih kompleksa poplo£avanja i za njih potvržena hipoteza da su tako de nisani simplicijalni kompleksi homotopni ved°u sfera. 8 Abstract Mathematics, architecture, art, computer graphics, optimization, and other scienti c disciplines o er a multitude of problems that come down to solving problems of tilings. This problem is mostly studied in the plane and as such represents an NP-hard problem. This doctoral dissertation studies the problem of tilings on the topological surfaces with polyomino shapes, and solutions for some classes of studied problems are given. Conway and Lagarias have provided a new technique that uses the boundary invariant method to determine the consistency of tilings. M. Reid expanded their results in his research. He gave the most successful method for studying the problem of surface tilings by working with the homotopy groups of tilings. In addition to the homotopy groups, he introduced the homology groups of tilings. In this thesis, we extend Reid's considerations to the study of tilings of topological surfaces with polyominoes by working with the homology groups of tilings and give evidence of (in)consistency of polyomino tilings for certain classes of considered problems. In addition to considering the problem of tilings on the topological surfaces in the doctoral dissertation, we introduce simplicial complexes that are associated with the placement of polyomino shapes on a square grid on a topological surface. We have named such simplicial complexes simplicial complexes of tilings. For the introduced simplicial complexes, we studied their properties (ag, pure, balanced, Cohen Macaulay, homology, Betti numbers, fundamental group) and calculated their speci c vectors (f and h vectors). In the fourth chapter of the doctoral dissertation, we also studied the connectedness of homotopic types of simplicial complexes of tilings. The homotopy type of some of the simplicial complexes of tilings was determined, and we con rmed the hypothesis that the simplicial complexes of polyomino tilings

have the homotopy type of a wedge of spheres . Particularly, **a** 19

poliomino poplo£avanja . . . . 103 4 Homotopski tip simplicijalnih kompleksa poplo£avanja 111 4.1 Fundamentalna grupa simplicijalnih kompleksa poplo£avanja . 113 4.2 Povezanost simplicijalnih kompleksa poplo£avanja . . . . 115 4.3 Homotopski tip simplicijalnih kompleksa poplo£avanja . . . . 116 Literatura Biogra ja 121 129 16 Glava 1 Topologija povr²i Topologija se kao nau£na oblast smatra relativno mladom matemati£kom disciplinom u odnosu na ostale jer je zasnovana u XIX vijeku. Po²to je kao matemati£ka disciplina postala prisutna kako u matematici tako i u drugim naukama do°ivljava ubrzan razvoj. U dana²nje vrijeme se mnogi aktuelni problemi posmatraju sa aspekta topologije. Motivaciju pronalazimo u tome da nam u prou£avanju problema nisu bitne metri£ke osobine prostora ili objekata, veç znanje o njihovoj povezanosti, obliku i drugim topolo²kim karakteristikama. Kao nau£na grana matematike, topologija poku²ava da prepozna i klasi kuje topolo²ke prostore. U ovom poglavlju dat çemo pregled osnovnih (topolo²kih) osobina povr²i. Osnovna literatura kori²tena za pisanje ovog poglavlja je [47], [45], [49], [80] i [83]. De nicija 1.0.

1 Neka je X neprazan skup i T familija podskupova od X . X **je topologija na X ako vrijedi** ˆ ∅, **X ∈ T** 15

, ˆ Presjek kona£no elemenata iz T je element iz T , ˆ Unija

elemenata iz T je element iz T . Urežen **par (X, T** 48

) naziva se topolo²ki prostor. Elementi topologije T ∈ X se nazivaju otvoreni skupovi. Primjer. Neka je τ = 2X , tj. razmotrimo svaki podskup u X kao otvoreni skup, drugim rije£ima prethodna izjava je ekvivalentna sa tvrdnjom da je svaka ta£ka x ∈ X otvoreni skup. Topologija de nisana na ovakav na£in naziva se diskretna topologija. De nicija 1.0.2 Neka su (X,U) i (X,V) topolo²ki prosotri, a D ⊆ X. Za preslikavanje f : D → Y ka°emo da je neprekidno u ta£ki x0 ∈ D

ako za 17 **svaku otvorenu okolinu V** ta£ke **f (x0) u Y postoji otvorena okolina U** ta£ke **x0 u X takva da je f (U ∩ V** 13

) ⊆ V . U suprotnom ka°emo da je preslikavanje f prekidno ili diskuntinuirano u ta£ki x0 ∈ D. Preslikavanje f : D → Y je neprekidno

na skupu A ⊆ D **ako je f neprekidno u svakoj** ta£ **ki skupa A** . Preslikavanje f **je** neprekidno ako je **neprekidno** 16

na D. De nicija 1.0.3 Preslikavanje f : A → B naziva se homeomorfno preslika- vanje (homeomor zam) ako je ono bijekcija i uzajamno neprekidno, tj. f i f −1 su neprekidna. 1.1 Povr²i Povr² (engl. surface) ili 2 dimenzionalna mnogostrukost (engl. 2 manifold) predstavlja topolo²ki prostor S u kojem svaka ta£ka s ∈ S ima okolinu homeomorfnu sa R2, za vi²e vidjeti [16] i [45]. U nastavku ¢emo dati pregled osnovnih osobina povr²i, njihove klasi kacije i na£ina konstrukcija novih povr²i. 1.1.1 Konstrukcije novih povr²i (Povezane sume) Povezana suma (#) je operacija za konstrukciju novih povr²i od datih povr²i M i N. Uklonimo li po jedan otvoreni disk D2, na svakoj od datih povr²i M i N, lijepe¢i homeomor zmom tako nastale povr²i na mjestima gdje smo uklonili otvoreni disk D2 dobijamo novu povr² M#N. Naprimjer neka su nam data dva torusa T2. Njihovom povezanom sumom dobijamo torus roda 2 ili torus sa dvije rupe (Slika 1.1). Pod lijepljenjem povr²i smatramo homeomor zam izmežu dvije kru°nice koji mijenja orijentaciju. Slika 1.1: Lijepljenje torusa u povezanu sumu T2#T2 Koriste¢i povezanu sumu mo°emo od nekoliko povr²i dobiti nove. Tako naprimjer, pove°emo li sferu S2 i projektivnu ravan RP2 ponovo ¢emo dobiti projektivnu ravan, a povezana suma dvije projektivne ravni daje Kleinovu bocu K2. Dokaze ovih tvrdnji dat ¢emo u nastavku. 18 1.2 Topolo²ke invarijante povr²i Osnovne osobine koje topolo²ki karakteri²u neku povr² su dimenzija, rod i njena granica. Pojmovi dimenzije i granice su nam intuitivno jasni, a pod pojmom roda podrazumijevamo broj ru£ki na povr²i. Povr² mo°e, ali i ne mora da ima svoju granicu. Ako povr² ima granicu, ona se sastoji od kona£no mnogo razdvojenih kru°nica S1. Kompaktne povr²i bez granice nazivamo zatvorenim. One su topolo²ki odrežene orijentabilno²¢u i rodom povr²i, tj. brojem "rupa". Njema£ki matemati£ar i astronom August Ferdinand Möbius je 1858. godine pokazao da postoji povr² po kojoj bismo mogli pustiti vektor normale da se kre¢e od bilo koje ta£ke do bilo koje druge na toj povr²i, ali da nikada ne preže preko ruba. Takve povr²i nazivamo neorijentabilnima. U suprotnom ka°emo da je povr² orijentabilna. Pored prethodno navedenog mo°emo re¢i da je topologija nauka koja se bavi prou£avanjem neprekidnosti i onim svojstvima neke strukture koja ostaju nepromijenjena (invarijantna) pri njenim neprekidnim transformaci- jama. Neke od topolo²kih invarijanti povr²i su (ne)orijentabilnost, rod i Eulerova karakteristika povr²i, za vi²e vidjeti [15], [16] i [23]. Orijentabilnost odnosno neorijentabilnost je jedno od va°nijih svojstava povr²i. Na osnovu ovog svojstva povr²i mo°emo podijeliti na orijentabilne (npr. sfera, ravan, torus) i neorijentabilne (npr. Möbiusova traka, Kleinova boca, projektivna ravan). Neka nam je data povr² M sa skupom vrhova (tjemena) V , skupom stranica E i skupom lica F . Tada je Eulerova karakteristika data sa χ(M) = |V | − |E | + |F |. Lema 1.2.1 Orijentabilna povr² roda g ima Eulerovu karakteristiku 2 − 2g, a neorijentabilna povr² roda g ima Eulerovu karakteristiku 2 − g. Za datu povr² Eulerova karakteristika i orijentabilnost opisuju njenu topolo- giju. Za svako dodavanje jo² jedne rupe Eulerova karakteristika se smanjuje za 1, tj. χ(M) = 2 − 2g − h, za orijentabilne povr²i, a za neorijentabilne povr²i χ(M) = 2 − k − h. Eulerova karakteristika povezane sume (M #N) povr²i M i N je data sa χ(M #N) = χ(M) + χ(N) − 2. 19 1.3 Rad s poligonima kao modelima povr²i. Svojstva i tehnike u (re)konstrukcijama povr²i Svaku povr² mo°emo predstaviti pomo¢u njenog modela u ravni sa nekim identi kovanim stranicama poligona. Naprimjer: ˆ Torus (T2) (za vi²e vidjeti [49], [80], i [83]) Slika 1.2: Torus u R3 Slika 1.3: Model T2 u R2 ˆ Projektivna ravan (RP2) (za vi²e vidjeti [49], [80], i [83]) Slika 1.4: Projektivna ravan Slika 1.5: Model RP2 u R2 ˆ Kleinova boca (K2) (za vi²e vidjeti [49], [80], i [83]) Slika 1.6: Imerzija Kleinove boce u R3 Slika 1.7: Model K2 u R2 20 ˆ Möbiusova traka (MB2) (za vi²e vidjeti [49], [80], i [83]) Slika 1.8: Möbiusova traka u R 3 Slika 1.9: Model MB2 u R2 1.3.1 Simbol dijagrama povr²i Pretpostavimo da smo povr² prikazali u njenom modelu u ravni, tj. u obliku poligona. Stranice poligona ozna£imo sa a, b, c, . . . ƒitaju¢i u smje- ru kazaljke na satu du° granice dobijamo simbol dijagrama, za vi²e vidjeti [47]. Simbol mo°e biti zamijenjen cikli£nom permutacijom, bez mijenjanja relativnog poretka stranica poligona. Tako naprimjer posmatramo li Sliku 1.10 £itaju¢i u smjeru ka- zaljke na satu dobit ¢emo da je simbol dijagrama prikazanog poli- gona abd−1bda−1. Dijagram poli- gona mo°e cikli£kom permutacijom biti zamijenjen sa d−1bda−1ab. Slika 1.10: Simbol dijagrama poligona abd−1bda−1 1.3.2 Imenovanje vrhova Svaku povr² mo°emo podijeliti na kona£an broj poligona. Neka nam je data povr² i posmatrajmo proizvoljnu ta£ku na njoj. Naprimjer, neka nam je dat torus roda 2 prikazan u svom modelu u ravni kao na

Slici 1.11. Na datom torusu odaberimo proizvoljnu ta£ku A. Ta£ka A na datoj povr²i moºe biti spojnica velikog broja poligona (njihovih stranica). Cilj nam je odrediti koje su to stranice. Ta£ka (vrh ili tjeme) A je zapravo predsta- vljena brojem stranica koje se u njoj spajaju. Obilazimo oko ta£ke A da Slika 1.11: Model u ravni torusa sa pokupimo sve njene susjede dok se dvije rupe ne vratimo u polaznu ta£ku. 21 Cilj nam je da imenujemo i grupi²emo sve vrhove. Neka je spoj stranica a i c vrh A. Slika 1.12: Identi kovanje vrhova A u poligonalnom modelu povr²i Identi kujmo sada klasu vrhova B i C . Slika 1.13: Identi kovanje klasa vrhova B i C u poligonalnom modelu povr²i 1.3.3 Redukcija na samo jedan vrh Pod poligonalnim modelom povr²i smatramo poligon £ije su neke stranice i vrhovi identi kovani tako da je okolina svake ta£ke homeomorfna disku. Povr²i mogu nastati na razli£ite na£ine identi kacijom stranica poligona, a dva poligona sa propisanim identi kacijama smatramo ekvivalentnim ako datim identi kacijama nastaju iste povr²i. Ovu de niciju zapravo moºemo pro²iriti na o£igledan na£in i za 2 dimenzionalne povr²i sa granicom. Teorema 1.3.1 Svaki poligon moºe biti uvijek zamijenjen ekvivalentnim po- ligonom u kojem je svaki vrh zalijepljen u istu ta£ku. Posmatrajmo prethodni primjer i izvr²imo redukciju na samo jedno pojavlji- vanje vrha B u poligonalnom modelu. 22 Slika 1.14: Redukcija na samo jedno pojavljivanje vrha B u modelu 1.3.4 Parovi stranica a a Teorema 1.3.2 Uvijek moºemo reducirati simbol nizova oblikom u kojem svi parovi stranica a a se pojavljuju jedan za drugim. Ovim na£inom pojedine vrhove moºemo u potpunosti eleminisati. Slika 1.15: Eliminacija vrha B 1.3.5 Parovi stranica a a−1 Sve parove oblika a a−1 moºemo zalijepiti, ako imamo samo dvije stra- nice. Tada poligon izgleda kao na Slici 1.16. Slika 1.16: Parovi stanica oblika a a−1 23 Tada stranice moºemo zalijepiti i dobijamo sferu S. Ako nemamo situaciju da su dvije stranice u istom vrhu kao gore, moºemo na¢i stranice u poligonu koje su iste, ali odvojene. Primjenom gore navedenih tehnika moºemo ih svesti na ºeljeni oblik. Teorema 1.3.3 Torus sa k rupa T2#T2# . . . #T2 moºe biti predstavljen kao poligon sa 4g strana i simbolom a1b1a−11b−11 . . . akbka−k1b−k1. Dokaz: Posmatrajmo dva torusa (T2) koja trebamo zalijepiti (spojiti) u jednu guru (objekat). Poznato nam je da ta dva data torusa T2 moºemo predstaviti u torusnom modelu u ravni kao na Slici 1.17 i Slici 1.18. Slika 1.17: Torus T21: a1b1a−11b−11 Slika 1.18: Torus T22: a2b2a−21b−21 Date toruse ¢emo transformisati na na£in koji je prikazan na Slici 1.19 i Slici 1.20, a lijepljenje datih torusa ¢emo izvr²iti po stranici c, kao ²to je prikazano na Slici 1.21. Slika 1.19: Shematski prikaz transformacije prvog torusa T21 24 Slika 1.20: Shematski prikaz transformacije drugog torusa T22 Slika 1.21: Shematski prikaz lijepljenja torusa T21 × T22 Pretpostavimo da je data tvrdnja ta£na za torus roda k. Dodajmo jo² jedan torus i dokaºimo da tvrdnja vrijedi za povezanu sumu dodaju¢i jo² jedan torus T2. Lijepljenje vr²imo po ivici d. Slika 1.22: Prikaz transformacije lijepljenja torusa roda k i torusa T21 25 Slika 1.23: Shematski prikaz lijepljenja torusa roda k i torusa T2 Teorema 1.3.4 Povezana suma od k kopija projektivnog prostora RP2#RP2# . . . #RP2 moºe biti predstavljena poligonom sa 2g strana i simbolom a1a1a2a2 . . . akak. Dokaz: Datu Teoremu dokazat ¢emo induktivno. Za g = 1 je o£ito tvrdnja ta£na jer tada objekt opisuje standardnu projektivnu ravan. Slika 1.24: Projektivna ravan RP2 Za g = 2 dobijamo Slika 1.25: Shematski prikaz transformacije prve projektivne ravni RP2 26 Slika 1.26: Shematski prikaz transformacije druge projektivne ravni RP2 Slika 1.27: Poligon dobijen lijepljenjem RP2#RP2 Pretpostavimo da je tvrdnja ta£na za g povezanih projektivnih ravni i dokaºimo da vrijedi za g + 1. Slika 1.28: Poligon dobijen lijepljenjem g povezanih projektivnih ravni Teorema 1.3.5 Sljede¢i objekti su homeomorfni RP2#RP2#RP2 ≈ K2#RP2 ≈ T2#RP2. Dokaz: Pokaºimo prvo da je K2 ≈ RP2#RP2. Kleinovu bocu u poligonal- nom modelu u ravni moºemo prikazati kao na Slici 1.29. Izvr²imo li rezanje po stranici d i lijepljenje po stranici b, uslijedit ¢e dokaz traºene tvrdnje, kao ²to i prikazuju Slika 1.29 i Slika 1.30. 27 Slika 1.29: K2 Slika 1.30: RP2#RP2 ²ta dobijemo spajanjem torusa (T2) i projektivne ravni (RP2). Sada ºelimo pokazati da je T2#RP2 ≈ RP2#RP2#RP2. Pogledajmo prvo Slika 1.31: Torus T2 Slika 1.32: Projektivna ravan RP2 Slika 1.33: Mjesto lijepljenja na T2 Slika 1.34: Mjesto lijepljenja na RP2 Slika 1.35: Kreiranje granice na T2 Slika 1.36: Kreiranje granice na RP2 28 Slika 1.37: Lijepljenje T2 i RP 2 Slika 1.38:

T2#RP2 Pokaºimo sada da je T2#RP2 ≈ RP2#RP2#RP2. Slika 1.39: Rezanje i novo lijepljenje Slika 1.40: Lijepljenje po stranici b Slika 1.41: T2#T2 Slika 1.42: Rezanje po stranici f Slika 1.43: Lijepljenje po c Slika 1.44: Rezanje po stranici g 29 Slika 1.45: Lijepljenje po d Slika 1.46: RP2#RP2#RP2 Slika 1.47: RP2 − a Slika 1.48: RP2 − f Slika 1.49: RP2 − g Lema 1.3.1 Ako x predstavlja stranicu i P i Q predstavljaju nizove strana, tada xxP −1Q ≈ x1P x1Q za odgovarajuçu stranicu x1. Dokaz: Opçenito moºemo reçi da vrijedi: Teorema 1.3.6 Neka je S kompaktna povr², formirana iz poligona u ravni lijepeçi odgovarajuçe stranice granica zajedno. Tada je S homeomorfna ta£no jednoj od povr²i ˆ T2#T2# . . . #T2, tj. torus sa k rupa. ˆ T2#T2# . . . #T2#RP2, tj. povezana suma od torusa sa k rupa i projektivna ravan, 30 ˆ T2#T2# . . . #T2#K povezana suma od torusa sa k rupa i Kleinova boca, ˆ sfera S2. U daljem prou£avanju povr²i posebno çemo se bazirati na prou£avanje tzv. translacijskih povr²i. 1.4 Translacijske povr²i Prou£avanja o ravnim povr²ima se pojavljuju pod razli£itim nazivima i u razli£itim pristupima, kao ²to su, naprimjer kvadratni diferencijali, abelovski diferencijali, translacione povr²i, F strukture i sli£no. Kvadratno pokrivene povr²i i translacijske povr²i nastaju iz dinami£kih sistema, a mogu biti kori²tene u bilijarskim modelima i Teichmüllerovoj teoriji. One imaju bogatu matemati£ku strukturu i mogu se prou£avati sa razli£itih aspekata, kao ²to su: ravna geometrija, algebarska geometrija, teorija kombinatornih igara i sli£no. Nama çe od posebnog interesa biti translacijske povr²i i njihove osobine. Umjesto prou£avanja regiona u ravni prou£avat çemo regione koji se dobiju identi kacijom dijelova granice regiona u ravni. Drugim rije£ima, prou£avat çemo ravne Riemannove povr²i. Jedine kompaktne ravne Rie- mannove povr²i su torus i Kleinova boca. Na povr²ima veçeg roda pravilna kvadratna mreºa se moºe de nisati u svim ta£kama, osim njih kona£no mnogo izolovanih singulariteta koji se nazivaju i konusne ta£ke. Uklanjanjem susjeda singularnih ta£aka dobijamo ravnu povr² sa granicom. Ako iz skupa strana poligona u ravni uparimo stranice iste identi kacije, dobit çemo povr² ravne metrike. Lijepljenjem identi kovanih strana dobit çemo translacijske povr²i. Translacijska povr² moºe biti de nisana i kao 1 holomorfna Riemannova povr². Opçenito, ugao oko ugla kvadrata dijela povr²i S je netrivijalni sadrºilac broja 2π. U kombinatornom smislu translacijsku povr² moºemo de nisati na slje- deçi na£in: De nicija 1.4.1 Neka P1, P2, . . ., Pm £ine kolekciju poligona u Euklidskoj ravni i pretpostavimo da za svaki poligon Pk i svaku stranu si postoji stranica sj za neki Pl, gdje je i ≠ j i sj = si + →−vi za neki vektor →−vi ≠ →−0 i takav da je →−vj = −→−vi. Prostor dobijen identi kacijom svih si sa njima odgovarajuçim sj preslikavanjem x → x + →−vi je translacijska povr². 31 Slika 1.50: Primjer translacijske povr²i Klasa translacijskih povr²i poznata pod nazivom kvadratna prekrivena povr² (engl. square tiled surfaces) je od velikog interesa za matemati£are. Kvadratna prekrivena povr² predstavlja orijentabilnu povr² dobijenu iz kona£ne familije jedini£nih kvadrata u ravni, nakon identi kacije parova paralelnih stranica sa adekvatnim translacijama. Opçenito, ukupan ugao kvadrata kvadratne prekrivene povr²i M je netrivijalni sadrºilac od 2π i svaka takva ta£ka se naziva konusnim singularitetom od M . Mi çemo prou£avati ravne povr²i sa konusnim singularitetima i konusnim uglom sadrºilaca od π . 2 32 Glava 2 Grupe homologija poliomino poplo£avanja povr²i Problemi koje nudi rekreativna matematika, kao ²to su kombinatorne igre, puzzle, trikovi sa kartama, problemi poplo£avanja i drugi interesantni su matemati£arima, ali i ²iroj publici. Ovi problemi su generalno jasni ²iroj pu- blici, ali put do njihovih rje²enja je, naj£e²çe, izrazito teºak. Ideje i problemi iz rekreativne matematike su doveli do razvoja potpuno novih matemati£kih disciplina. Naprimjer, prou£avanje problema sedam Königsbergskih mostova dovelo je do razvoja teorije grafova, a prou£avanje magi£nih kvadrata do razvoja kombinatornog dizajna. Problem poplo£avanja predstavlja jedan od tradicionalno prou£avanih problema u matematici, odnosno kombinatorici. Iako ovaj problem seºe iz daleke matemati£ke pro²losti, zbog svog zna£aja za arhitekturu, umjetnost, kompjutersku gra ku, optimizaciju i druge primjene, aktuelan je i danas. Cilj ovog poglavlja doktorske disertacije je razmotriti problem poplo£avanja na topolo²kim povr²ima. Osnovna literatura kori²tena za pisanje ovog poglavlja je [17], [50] i [67]. 2.1 Problem poliomino poplo£avanja Poliomino je geometrijska gura u ravni dobijena spajanjem jednog ili vi²e identi£nih kvadrata stranica uz stranicu. Moºemo ih posmatrati kao kona£an podskup pravilnog kvadratnog poplo£avanja sa popunjenom unutra²njosti. Rije£ poliomino prvi je upotrijebio Golomb u [24]. Poliomino koji se sastoji od ta£no n ¢elija nazivamo n omino. Poliomino oblike za n ≤ 5 ilustrovali smo na Slikama 2.1, 2.2 i 2.3. Neki poliomino oblici li£e na slova alfabeta pa su imena dobili po njima, koja ¢emo u nastavku koristiti za njihovo razlikovanje, vidjeti Sliku 2.2 i 2.3. U literaturi su jo² 33 poznati i kao ºivotinje na kvadratnim re²etkama. Za poliomino oblik kaºemo da je slobodan ako na njemu dozvolimo translacije, rotacije i re eksije. Ako je na poliomino obliku zabranjena translacija, a dozvoljena rotacija i re eksija, tada kaºemo da je takav poliomino oblik ksan. Razli£ite rotacijske orijentacije kod ksnih poliomino oblika se smatraju jednakim, ali oblici s razli£itim kiralnostima ili orijentacijama se smatraju razli£itima. Poliomino oblike zovemo jednostranima kada se posmatraju u istoj kiralnosti ili orijentaciji. Slika 2.1: Monomino, domino i tromino oblici Slika 2.2: Tetromino oblici Slika 2.3: Pentomino oblici Njih su popularizovali Solomon Golomb koji je napisao prvu monogra ju o poliominima [25] i Martin Gardner u svojoj kolumni Scienti c Ameri- can Mathematical Games , vidjeti [22]. Danas predstavljaju jedan od najpopularnijih subjekata rekreativne matematike i od velikog interesa su matemati£arima, zi£arima, biolozima, kompjuterskim nau£nicima i dr. Za 34 vi²e informacija pogledati [2] i [6]. Redelmeier je 1981. godine u svom radu [66] izra£unao broj slobodnih s(n) i ksnih t(n) n omina za n = 1, . . . , 24. Ovim problemom se kasnije bavi i Mertens u svom radu [56] koji je objavljen 1990. godine. Prou£avanjem slobodnih n omina bavili su se i Lunnon [52], [53], Read [65], Ball i Coxeter [3], Conway i Gutman [18] te Goodman i O'Rouke [29]. U tabeli 2.1 dajemo prikaz broja slobodnih, ksnih i jednostranih poliomino oblika r(n) za n = 1, . . . , 24. Lako se uo£ava da vrijednosti od r(n), t(n) i s(n) eksponencijalno rastu i da za svako n vrijedi t(n) ≤ s(n) ≤ r(n) ≤ t(n). Jensen i Guttman [33], [34] i Jensen [35] su ra£unanje nastavili do n = 56. 8 Tabela 2.1: Tabela sa brojem ksnih, jednostranih i slobodnih n-omina za

n ≤ 24 n t(n) r(n) s(n) 1 1 1 1 2 2 1 1 3 6 2 2 4 19 7 5 5 63 18 12 6 216 60 35 7 760 196 108 8 2725 704 369 9 9910 2500 1285 10 36446 9189 4655 11 135268 33896 17073 12 505861 126759 63600 13 1903890 476270 238591 14 7204874 1802312 901971 15 27394666 6849777 3426576 16 104592937 26152418 13079255 17 400795844 100203194 50107909 18 1540820542 385221143 192622052 19 5940738676 1485200848 742624232 20 22964779660 5741256764 2870671950 21 88983512783 22245940545 11123060678 22 345532572678 86383382827 43191857688 23 1344372335524 336093325058 168047007728 24 5239988770268 1309998125640 654999700403

8

Madras u svom radu [54] dokazuje postojanje asimptotskog omjera rasta broja n omina koji iskazuje u sljede¢oj teoremi: 35 Teorema 2.1.1 t(n + 1) n→∞ lim t(n) postoji (i jednaka je λ). Rezultati koje su dali Eden [20], Klarner [43], Kalrner i Rivest [44], te Ball i Coxeter [3] u svojim radovima uveliko su pomogli u procjeni konstante (λ) koja govori o broju poliomino oblika za proizvoljan broj n. Trenutno najbolja poznata donja granica konstante λ data je u [7] i iznosi 4.0025, a najbolja gornja u [44] s vrijedno²¢u 4.6496. Pored granica koje su dokazane, najboljom nedokazanom ocjenom se uzima ona koju je dao Jensen [35], a iznosi 4.0625696 ± 0.0000005. Ova konstanta (engl. growth constant) se £esto jo² naziva i Klarnerova konstanta. Mi ¢emo poliomino oblike koristiti kao objekte pomo¢u kojih ¢emo prekrivati ili poplo£avati ºeljeni region M. Problem poliomino poplo£avanja postavlja pitanje da li je mogu¢e pravilno prekriti kona£an region M koji se sastoji od ¢elija sa datim skupom T poliomino oblika. Pod pravilnim poplo- £avanjem podrazumijevat ¢emo poplo£avanje pravilnim mnogouglovima pri £emu svi mnogouglovi i sva £vori²ta (mjesta gdje se spajaju vrhovi susjednih mnogouglova) moraju biti podudarni. Postoji velik broj generalizacija ovog problema u odnosu na simetri£na i asimetri£na poplo£avanja, analogone vi²ih dimenzija, poliomino oblike u drugim pravilnim re²etkama (trougaone, hexagonalne i dr). Mežutim, ovaj problem je generalno NP-teºak i moºemo dati odgovor samo u kona£nom broju slu£ajeva. Ovaj problem privla£i paºnju matemati£ara, ali i onih koji to nisu. Postoji velik broj rezultata za neki speci £an poliomino oblik (vidjeti [26], [27], [28], [68] i [69]). Conway i Lagarias su istraºili u [17] metod zvan grani£na rije£ (engl. boundary word) za rje²avanje ovog problema. Koriste¢i se idejom koju su dali Conwy i Lagarias istraºivanje ovog problema nastavlja Reid u [67]. Reid je u svom istraºivanju dodijelio svakom skupu dijelova T grupu homologija i grupu homotopija poplo£avanja. On je dao potrebne uvjete za postojanje ºeljenog poplo£avanja kona£nog regiona M u ravni. Ova ideja omogu¢ila je generalizaciju velikog broja klasa kombinatornih poplo£avanja. U ovom poglavlju bavit ¢emo se problemom poplo£avanja povr²i S koja je podijelje- na u kona£ne kombinatorne mreºe koje ne mogu biti pravilno poplo£ane kona£nim skupom T poliomino oblika i de nisat ¢emo grupu homologija HS(T). U prou£avanju poplo£avanja povr²i mi smo se bazirali isklju£ivo na prou- £avanje specijalnih poplo£avanja translacijskih povr²i. U sljede¢em odjeljku uvest ¢emo grupu homologija poplo£avanja za kona£ne kvadratne mreºe na povr²ima sa granicom u skladu sa [67]. Dat ¢emo ilustracije primjera i dokaze tvrdnjih nekoliko teorema u kojima se dokazuje (ne)postojanost traºenih 36 poplo£avanja, a £iji dokazi su provedeni u skladu sa grupama homologija poplo£avanja. 2.2 Problem poplo£avanja povr²i Standardna kvadratna mreºa u ravni je karakteristi£na svojstvom da se ta£no £etiri stranice susre¢u u jednom vrhu, tj. svaki vrh je zajedni£ki za £etiri kvadrata u mreºi. Pretpostavljamo da je svaka stranica mreºe osim ako nije dio grani£ne komponente, zajedni£ka za ta£no dva kvadrata. Ovo lokalno svojstvo ¢e biti sa£uvano za de nisano poliomino poplo£avanje na povr²i kao ²to je slu£aj u ravni. Takvu strukturu ¢emo zvati kvadratna mreºa na povr²i. Identi kacijom paralelnih stranica granice od m × n mreºe u istom smjeru daje takve mreºe na torusu. Identi kacijom od dva para susjednih stranica od m × m, gdje je m ≥ 3, primjer kvadratne mreºe na Kleinovoj boci, ali za ostale topolo²ke strukture je nemogu¢e dati takve primjere, osim ako ne dozvolimo da povr²i imaju granice, vidjeti Sliku 2.4. Slika 2.4: Kvadratna mreºa na torusu i Kleinovoj boci Propozicija 2.2.1 Neka je M topolo²ka povr² koja nema granice i pretpo- stavimo da je na njoj data kona£na mreºa. Tada je M torus ili Kleinova 37 boca. Dokaz: Ako na povr²i M nema grani£nih komponenti, svaki vrh je inci- dentan sa ta£no £etiri kvadrata i svaka stranica je incidentna ta£no sa dva kvadrata na mreºi. Ako je n kona£an broj kvadrata na mreºi, tada Eulerova karakteristika od M je $\chi(M) = V - E + F = F - 2F + F = 0$. Nadalje, M je torus ili Kleinova boca. Topolo²ka povr² sa granicom kvadratne mreºe nije rijetka struktura. Jedan od na£ina za njeno dobijanje je identi kacijom nekih strana kona£nog regiona u kvadratnoj mreºi u ravni. Podsjetimo da identi kacija strana zna£i dodavanje i novih mogu¢nosti za postavljanje poliomino dijelova na kvadratnoj mreºi. Povr² dobijenu lijepe¢i stranice poligona su opseºno prou£avali mnogi matemati£ari i interesantan je predmet prou£avanja za sebe (vidjeti [1], [31], [47] i [80]). Problem poplo£avanja za kona£an podskup od pravilne kvadratne mreºe u ravni sa kona£nim skupom protudijelova poliomino oblika je bio £esta tema prou£avanja u zadnjim dekadama. Mežutim, postoji mnogo drugih topolo²kih 2 mnogostrukosti koje zadovoljavaju podjelu na kona£an broj kvadrata koji £uvaju strukturu pravilne kvadratne mreºe za koju je i de nisan problem poplo£avanja. Neki rezultati i primjeri poliomino poplo£avanja u literaturi su poznati pod notacijom topolo²ka poplo£avanja. Specijalno slu£ajevi valjka, torusa, Möbiusove trake, Kleinove boce i projektivne ravni su prou£avani u [25], [72] i [51]. Poznato je nekoliko tehnika za traºenje opstrukcija poplo£avanja regiona M, a najzanimljivija je tehnika generalizacije bojanja ²ahovske plo£e. Ova tehnika se zasniva na £injenici da se ²ahovska tabla sa uklonjenim suprotnim poljima ne moºe poplo£ati dominama, a njen dokaz se zasniva na razlici izmežu broja bijelih i crnih polja, vidjeti [24]. Op¢enito, ideja se sastoji u tome da se sa nekoliko boja oboje sva polja datog regiona. Takvo bojanje daje specijalan slu£aj bojanja (engl. pattern), koje nam daje teorijske uslove za postojanje poplo£avanja, ali koji daleko od toga da moraju da budu i dovoljni uslovi. Mežutim, nije lako prona¢i argument bojanja za dokazivanje nepostojanja poplo£avanja. Reid je u [67] uveo grupu homologija poplo£avanja i dokazao netrivijalnost specijalnog elementa u ovoj grupi koji je dodijeljen kona£nom podskupu od pravilne kvadratne re²etke proizvedene generalizacijom argu- menta bojanja ²ahovske plo£e. Metod poplo£avanja grupe homologija koji je dao Reid je sna°niji od argumenta bojanja. U istom radu Reid daje neke 38 primjere gdje poznavanje poplo£avanja grupe homologija nije dovoljno za dokazivanje nepostojanja poplo£avanja. Problem poliomino poplo£avanja su prou£avali Conway i Lagarias u [17] gdje su uveli novu tehniku koja koristi grani£ne invarijante za formulaciju potrebnih uvjeta za postojanje poplo£avanja. Baziraju¢i se na ideju koju su dali Conway i Lagarias, Reid je predstavio u [67] novu strategiju za pristup problemu poplo£avanja rade¢i sa kona£nim grupama homotopija. Reidov metod poplo£avanja u grupi homotopija je najuspje²niji u uspostavljanju potrebnih kriterija za postojanje poplo£avanja. Na²a glavna opservacija je da se Reidov metod prou£avanja problema poplo£avanja u grupi homologija mo°e primijeniti za prou£avanje topolo²kih poplo£avanja. Klasi£ni model za dobijanje topolo²kih povr²i je identi kacija strana poligona, vidjeti [47] i [80]. Neka je M topolo²ka povr² sa granicom dobijena lijepe¢i stranice od nekog kona£nog podskupa R pravilne kvadratne mre°e u ravni i neka je T kona£an skup poliomino dijelova. Lijepe¢i strane dobijamo vi²e na£ina za postavljanje dijela iz T na M nego u slu£aju od R, tako M mo°e biti poplo£an iako R ne dozvoljava poplo£avanje sa dijelovima iz T . Mi uvodimo grupu homologija poplo£avanja H(M, T) u [50] na isti na£in kao i Reid. Neka je A slobodna Abelova grupa generirana sa skupom ¢elija od M. Pretpostavimo da su sve ¢elije od M zadr°avaju ozna£avanje sa (i, j) iz R. Generator od A koji odgovara ¢eliji (i, j) je ozna£en sa ai,j. Neka je B(M, T) podgrupa generisana sa svim elementima koji odgovaraju svim mogu¢im postavljanjima dijelova u T , tj. sumi elemenata dodijeljenih ¢elijama od M koji mogu biti prekriveni dijelovima iz T . De nicija 2.2.1 Grupa homologija dijelova (M, T) je koli£ni£ka grupa H(M, T) = A/B(M, T). Neka je sa āi,j ozna£ena slika od ai,j u H(M, T). Kao u slu£aju u ravni, tu je element Θ ∈ H(M, T) dodijeljen od M Θ := āi,j (i,∑j)∈M koji je nula kada postoji poplo£avanje od M sa poliominima iz T . Nadalje, Θ je opstrukcija za poplo£avanje. Pored navedenog Michael Reid u svom radu [67] je razmotrio i takozvana ozna£ena poplo£avanja (engl. signed tiling), gdje dozvoljava da poliomino poplo£avanje ima pozitivan i negativan znak. Jasno, znak poplo£avanja od M sa T postoji ako i samo ako je Θ trivijalan u H(M,T). 39 Grupe homologija poplo£avanja u ravni koje je de nisao Reid su koriste¢i Gröbnerove baze prou£avali u svojim radovima Muzika-Dizdarevi¢, Timoti- jevi¢ i šivaljevi¢, vidjeti [62] i [63]. Propozicija 2.10 koju Reid daje u radu [67] za poplo£avanja sa poliomi- nima u ravni je također zadovoljena i za topolo²ka poplo£avanja sa poliomi- nima. U navedenoj propoziciji se isti£e da netrivijalni element Θ proizvodi specijalno pridru°ivanje racionalnih brojeva ¢elijama u M koje daju gene- ralizaciju argumenta bojanja ²ahovske table. U nastavku dajemo Propozi- ciju 2.2.2 koja predstavlja prilagodbu Propozicije 2.10 iz [67] za topolo²ka poplo£avanja. Propozicija 2.2.2 Neka je M topolo²ka povr² sa granicom, sa kona£nom kvadratnom mre°om i kona£nim skupom poliomino oblika T te da je Θ netrivijalan u H(M, T). Tada postoji bojanje ¢elija racionalnim brojevima u M takvo da i) za svako postavljanje dijela iz T ukupna suma prekrivenih brojeva je cijeli broj, i ii) ukupan zbir svih brojeva u ¢elijama u M nije cijeli broj. Dokaz: Neka je data cikli£ka podgrupa ⟨Θ⟩ ⊂ H(T) generirana sa Θ. De ni²imo homomor zam ϕ : ⟨Θ⟩ → Q/Z sa ϕ(Θ) ≠ 0. Ako Θ ima beskona£an red tada uzimamo ϕ(Θ) = 12 mod Z, a ako Θ ima kona£an red n > 1, tada de ni²emo ϕ(Θ) = 1n mod Z. Kako je Q/Z djeljiva Abelova grupa, a homomor zam ϕ pro²iren do homomor zma H(M, T) → Q/Z također zovemo ϕ. Ovdje koristimo ekvivalentne tvrdnje i osobine od injektivnih i djeljivih grupa za Abelove grupe ([12], Propozicija 6.2) Nadalje, A je slobodna Abelova grupa, kompozicija preslikavanja A A/B(M, T) = H(M, T) ϕ Q/Z dozvoljava homomor zam ψ : A → Q, takav da sljede¢i dijagram komutira A ψ Q H(M, T) ϕ Q/Z gdje je vertikalna surjekcija koli£ni£ko preslikavanje. šeljeno bojanje ¢elija je de nisano sa ψ, i jednostavno B(M, T) je jezgro od A → Q/Z, gdje svako postavljanje dijela prekriva ukupno cijeli broj. Ali, ϕ(Θ) ≠ 0 i ukupan broj ¢elija u M nije cijeli broj. 40 Razmatranje poplo£avanja je posebno interesantno na toplo²kim povr- ²ima jer mnogobrojni primjeri koji se ne mogu rije²iti u ravni na povr²ima nude lijepa i jednostavna rje²enja. Naprimjer, posmatramo li u ravni tablu dimenzije 3 × (2k + 1) podijeljenu u kvadratnu mreºu istu ne moºemo poplo£ati sa L trominima, dok istu kvadratnu mreºu dimenzije 3 × (2k + 1) na torusu sa istim oblikom moºemo poplo£ati za svako k ∈ N. Dokaz tvrdnje za torusnu kvadratnu mreºu 3 × (2k + 1) i postojanost poplo£avanja sa L trominima za svaki prirodan broj k dajemo u sljede¢oj propoziciji. Propozicija 2.2.3 Kvadratna torusna mreºa dimenzije 3 × (2k + 1) moºe se poplo£ati sa L trominima za svako k ∈ N. Dokaz: Posmatrajmo torusne mreºe 3 × 9 i 3 × 11. Neka je sa brojevima od 1, 2, . . ., ozna£eno postavljeno L tromina na datu kvadratnu torusnu mreºu. Uo£imo da L tromino u prvi stupac moramo postaviti tako da jedno polje od L tromina prelazi donju stranicu lijepljenja (postavljanje prikazano brojem 1), a drugi L tromino prelazi desnu vertikalnu stranicu lijepljenja (postavljanje prikazano brojem 2). Zatim naizmjeni£no postavljajmo L tromino na datu tablu u poloºajima prikazanim pod brojem 4 i 5, redom kako dolaze. Slika 2.5: Kvadratna torusna mreºa dimenzije 3 × 9 Analogno, vrijedi za kvadratne torusne mreºe dimenzije 3 × (2k + 1), za svako k ∈ N. Slika 2.6: Kvadratna torusna mreºa dimenzije 3 × (2k + 1) U sljede¢em primjeru dajemo prikaz postojanosti poplo£avanja kvadratne torusne mreºe dimenzije 5 × 5 sa L pentaminima u homolo²koj grupi koja je trivijalna. 41 Primjer 1 Kvadratna torusna mreºa dimenzija 5 × 5 moºe se poplo£ati L pentaminima. Rje²enje: Na Slici 2.7 je dato mogu¢e poplo£avanje kvadratne torusne mreºe 5 × 5 sa L pentaminima. Slika 2.7: Poplo£avanje kvadratne torusne mreºe 5 × 5 sa L pentaminom Uvjerimo se ra£unom da je homolo²ka grupa traºenog poplo£avanja trivijalna. Neka je data torusna mreºa dimenzije 5 × 5 predstavljena u torusnom modelu mreºe u ravni i sa datim imenima ¢elija kao na Slici 2.8. Slika 2.8: Kvadratna torusna mreºa dimenzije 5 × 5 Razmotrimo mogu¢a postavljanja na²eg dijela na dati model torusne mreºe u ravni. Svako postavljanje zadovoljava neku od relacija:

āi+1,j + āi,j + āi,j+1 + āi,j+2 + āi,j+3	11

= 0, (2.1) 42 gdje i (i = 1,...,5) predstavlja datu vrstu, a j (j = 1,...,5) dati stupac na datoj torusnoj mreºi i vrijedi da je 5+i = i za svako i ∈ {1,...,5} i 5+j = j za svako j ∈ {1,...,5}. Posmatraju¢i relaciju (2.1) i relaciju

āi,j + āi+1,j + āi+2,j + āi +3, **j + āi** +3, **j+1**	34

= 0, dobijamo da u grupi homologije ovog poplo£avanja za svako i, j ∈ {1, . . . , 5} vrijedi da je āi,j = āi,j+1 = āi+1,j, na osnovu £ega slijedi da su sva polja na torusnoj mreºi ekvivalentna. Postavimo li dati poliomino oblik na torusnu mreºu sa ekvivalentnim ¢elijama dobijamo da vrijedi relacija 5ā1,1 = 0, odakle slijedi da je na²a grupa homologija izmorfna grupi G⟨ā1,1|5ā1,1 = 0⟩ ~= Z5. Razmotrimo li datu torusnu mreºu na njoj imamo 25 ¢elija ā1,1, drugim rije£ima slijedi da je element koji odgovara ovoj tabli Θ = 25ā1,1 = 5(5ā1,1) = 0, trivijalni element na²e grupe. Sljede¢i primjer pokazuje da element koji odgovara mreºi poplo£avanja u ? grupi homologija moºe biti trivijalan, a da poplo£avanje nije mogu¢e. Primjer 2 Kvadratna torusna mreºa dimenzija 5 × 5 ne moºe se poplo£ati T pentaminima. Rje²enje: Neka je data kvadratna torusna mreºa dimenzije 5 × 5 predsta- vljena u torusnom modelu mreºe u ravni i sa datim imenima ¢elija kao na Slici 2.8. Razmotrimo mogu¢a postavljanja T pentamina na dati model torusne mreºe u ravni. Svako postavljanje zadovoljava neku od relacija:

āi,j + āi+1,j + āi+2,j + āi+2,j +2 + **āi+2,j**	32

+3 = 0, (2.2) gdje i (i = 1,...,5) predstavlja datu vrstu, a j (j = 1,...,5) dati stupac na datoj torusnoj mreºi i vrijedi da je 5+i = i za svako i ∈ {1,...,5} i 5+j = j za svako j ∈ {1,...,5}. Posmatraju¢i relaciju (2.2) i relaciju āi,

j + āi,j+1 + āi,j+2 + āi+1,j+1 + āi+2,j	21

+1 = 0, dobijamo da u grupi homologije ovog poplo£avanja za svako i, j ∈ {1, . . . , 5} vrijedi da je āi,j = āi,j+1 = āi+1,j. 43 Odakle slijedi da su sva polja na torusnoj mreºi ekvivalentna. Postavimo li T pentamino na torusnu mreºu sa ekvivalentnim ¢elijama dobijamo da vrijedi relacija 5ā1,1 = 0, na osnovu £ega slijedi da je na²a grupa homologija izmorfna grupi G⟨ā1,1|5ā1,1 = 0⟩ ~= Z5. Razmotrimo li datu torusnu mreºu na njoj imamo 25 ¢elija ā1,1, drugim rije£ima slijedi da je element koji odgovara ovoj tabli Θ = 25ā1,1 = 5(5ā1,1) = 0, trivijalni element na²e grupe. Ispitajmo sada koje sve mogu¢nosti postoje u postavljanju T pentamina na datu torusnu mreºu i provjerimo da li poplo£avanje postoji ili ne postoji. Moºemo ksirati prvo postavljanje T pentamina kao na Slici 2.9. Slika 2.9: Fiksirano postavljanje T pentamina na torusnu mreºu Pretpostavimo da je traºeno poplo£avanje mogu¢e i razmotrimo kako bismo mogli postaviti T-pentamino tako da prekrije ¢eliju a1,1 na torusnom modelu mreºe u ravni. Tada dobijamo sljede¢e slu£ajeve. 44 Slika 2.10: Slu£aj 1 Slika 2.12: Slu£aj 3 Slika 2.11: Slu£aj 2 Slika 2.13: Slu£aj 4 Jasno je da Slu£aj 4 nema smisla razmatrati zbog neprekrivene ¢elije a2,2. Analizirajmo preostala tri slu£aja i mogu¢nost njihovog daljeg poplo£avanja. Posmatrajmo prvo Slu£aj 1 i razmotrimo mogu¢nosti prekrivanja ¢elije ā5,1. Slika 2.14: Mogu¢nost postavljanja T pentamina da prekrije ¢eliju a5,1 u Slu£aju 1 45 Nakon postavljanja T pentamina uo£avamo da u Slu£aju 1 poplo£avanja nije mogu¢e. Drugih mogu¢nosti u prvom slu£aju nemamo. Razmotrimo Slu£aj 2. Prvo razmotrimo mogu¢a postavljanja T pentamina na torusnu mreºu tako da prekriva ¢eliju ā5,1. Tada T pentamino moºemo postaviti na na£in prikazan na Slici 2.15. Slika 2.15: Mogu¢nost postavljanja T pentamina da prekrije ¢eliju ā5,1 u Slu£aju 2 Tada uo£avamo da nam polja ā1,3 i ā2,3 ostaju zatvorena, ²to nas dovodi do zaklju£ka da traºeno poplo£avanje nije mogu¢e. Preostaje nam jo² razmotriti da li je poplo£avanje mogu¢e u Slu£aju 3. U ovom slu£aju T pentamino moºemo postaviti na torusnu plo£u kao na sljede¢im slikama. Slika 2.16: Postavljanja T pentamina da prekrije polje a5,1 u Slu£aju 3 Za drugu mogu¢nost je o£igledno da poplo£avanje ne postoji, a postavljanje jo² jednog T pentamina na torusnu mreºu u prvoj mogu¢nosti vodi nas istom zaklju£ku da poplo£avanje nije mogu¢e. Na osnovu prethodno re£enog zaklju£ili smo da poplo£avanje kvadratne torusne mreºe dimenzije 5 × 5 sa T pentaminima nije mogu¢e. ? 46 Na osnovu Primjera 1 i Primjera 2 moºemo zaklju£iti da u slu£aju kada je element Θ u traºenoj grupi homologija jednak nuli, ne moºemo sa sigurno²¢u tvrditi da poplo£avanje postoji ili ne postoji, u takvim slu£ajevima treba izvr²iti dodatnu analizu pomo¢u koje bismo mogli utvrditi da li je takvo poplo£avanje mogu¢e ili nemogu¢e. 2.3 Nepostojanost poliomino poplo£avanja na topolo²kim povr²ima U ovom dijelu dat ¢emo prikaz nekih rezultata nepostojanja poliomino poplo£avanja na topolo²kim povr²ima. Prou£avat ¢emo poplo£avanje povr²i razli£itog roda sa granicom, sa odabranim skupom poliomino oblika za ilustraciju ra£unanja grupe homologija poplo£avanja povr²i. Prvo ¢emo dati pregled tri rezultata poliomino poplo£avanja na kvadrat- noj torusnoj mreºi. Ovakva poplo£avanja su i ranije razmatrana [72] kao zatvoreni dijelovi u ravni. Rezultat dat u Teoremi 2.3.1 je prikazan u radu [50]. Teorema 2.3.1 Kvadratna torusna mreºa dimenzije (4m + 2) × (4n + 2) ne moºe se poplo£ati sa I-tetrominima. Dokaz: Neka je data kvadratna torusna mreºa dimenzije $(4m + 2) \times (4n + 2)$ u torusnom modelu mreºe u ravni sa ozna£enim ¢elijama kao na Slici 2.17. Slika 2.17: Torusna mreºa dimenzije $(4m + 2) \times (4n + 2)$ Razmotrimo sva moguća postavljanja datog poliomino oblika na dati torusni model mreºe. Svako postavljanje zadovoljit ¢e neku od sljedeće dvije 47 relacije: $\bar{a}_{i,j}$ +

$\bar{a}_{i,j+1} + \bar{a}_{i,j+2} + \bar{a}_{i,j}$ +3 = 0 i $\bar{a}_{i,j} + \bar{a}_{i+1,j} + \bar{a}_{i}$ +2, $j + \bar{a}_{i}$ +3, j = 0 gdje i = 1 , . . . , 4m + 2 ozna£ava redove, a j = 1 , . . . , 4n + 2 23

ozna£ava kolone datog modela torusne mreºe. Pretpostavimo da su indeksi redova predsta- vljeni po modulu 4m + 2, a indeksi kolona po modulu 4n + 2. Razmotrimo li sljedeće relacije

$\bar{a}_{i,j+1} + \bar{a}_{i,j+2} + \bar{a}_{i,j+3} + \bar{a}_{i,j+4}$ 11

= 0 dobijamo da u grupi homologija traºenog poplo£avanja vrijedi $\bar{a}_{i,j} = \bar{a}_{i,j+4}$ za svako $i, j \in \{1, 2, \ldots, 4k + 2\}$. Analogno, $\bar{a}_{i,j} = \bar{a}_{i+4,j}$. Iz relacija koje odgovaraju postavljanjima preko identi ciranih strana pravougaonika kojim je predstavljen na² torusni model mreºe dobijamo odgovarajuće ¢elije mreºe koje su jednake odgovarajućim generatorima u traºenoj grupi homologija poplo£avanja. Koristeći $\bar{a}_{i,4m-1} + \bar{a}_{i,4m} + \bar{a}_{i,4m+1} + \bar{a}_{i,4m+2} = 0$ i $\bar{a}_{i,4m} + \bar{a}_{i,4m+1} + \bar{a}_{i,4m+2} + \bar{a}_{i,1} = 0$ zaklju£ujemo da $\bar{a}_{i,1} = \bar{a}_{i,4m-1}$. Na isti na£in zaklju£ujemo da vrijedi $\bar{a}_{i,2} = \bar{a}_{i,4m}$, $\bar{a}_{1,i} = \bar{a}_{4n-1,i}$ i $\bar{a}_{2,i} = \bar{a}_{4n,i}$ za svako i. Kombinirajući dobijene jednakosti, dobijamo $\bar{a}_{1,1}$, ako je i ≡ 1 (

mod 2), j ≡ 1 (mod 2), $\bar{a}_{i}$, j = $\bar{a}_{1}$, 2 , $\bar{a}_{2}$, 1 , $\bar{a}_{2}$, 2 6

, ako je i ≡ 1 ako je i ≡ 0 ako je

i ≡ 0 (mod 2), j ≡ 0 (mod 2), j ≡ 1 (mod 2), j ≡ 0 (mod 2), (mod 2), (mod 17

2). kao ²to je pri kazano na Slici 2.18. Postavimo li I-tetromino na torusnu mreºu sa dobijenim ekvivalentnim ¢elijama dobijamo da vrijede sljedeće relacije

$2\bar{a}_{1,1} + 2\bar{a}_{1,2} = 0$, $2\bar{a}_{2,1} + 2\bar{a}_{2,2} = 0$, $2\bar{a}_{1}$, 1 + $2\bar{a}_{2,1}$ = 0 36

, $2\bar{a}_{1,2} + 2\bar{a}_{2,2} = 0$. Nadalje, na²a grupa homologija je izomorfna sa koli£ni£kom grupom slobodne Abelove grupe generirane sa £etiri generatora i gore navedene £etiri relacije. 48 Slika 2.18: Bojanje ekvivalentnih ¢elija torusne mreºe Razmotrimo li njihovu reprezentaciju koristeći sljedeća £etiri generatora $a = \bar{a}_{1,1}$, b =

ā1,1 + ā1,2 , c = **ā1,1 + ā2,1** i d = **ā2,2 − ā1,1**	37

. Tada slijedi da je 2b = 2c = 2d = 0, odakle slijedi da je na²a grupa homologija poplo£avanja izomorfna sa G⟨a, b, c, d|2b = 2c = 2d = 0⟩ ~= Z ⊕ (Z2)3. Torusna mreºa ima 2k + 1 ¢elija ā1,1, ā1,2, ā2,1 i ā2,2, gdje je k = 2mn + m + n. Drugim rije£ima slijedi da je element koji odgovara datoj torusnoj mreºi Θ = (2k + 1)

ā1,1 + (2k + **1)ā1,2** + (2k + **1)ā2,1** + (2k + **1)ā2,2** = ā1, **1 + ā1** ,2 + **ā2,1** + ā2, **2**	7

= b + c + d netrivijalan u traºenoj grupi homologija, pa traºeno poplo£avanje nije mogu¢e. Napomena 2.3.1 Do istog zaklju£ka moºemo do¢i bojanjem torusne plo£e kao na Slici 2.18. Svaki dio prekriva 2 plave i 2 ºute ¢elije, ili 2 plave i 2 crvene, ili 2 ºute i 2 zelene, ili 2 crvene i 2 zelene. Broj ¢elija u svakoj boji je paran, a svaki dio prekriva neparan broj ¢elija, pa na osnovu toga moºemo zaklju£iti da traºeno poplo£avanje nije mogu¢e. Razmotrimo sada poplo£avanja kvadratne torusne mreºe dimenzije (4m+ 2) × (4n + 2) sa T tetrominima [[50], Teorema 3.1] i sa heksominima [[50], Teorema 3.2]. 49 Teorema 2.3.2 Kvadratna torusna mreºa dimenzije (4m + 2) × (4n + 2) ne moºe se poplo£ati s T tetrominima. Dokaz: Razmotrimo torusnu mreºu predstavljenu kao na Slici 2.17. Razmo- trimo sva mogu¢a postavljanja T tetromina na datu torusnu mreºu. Svako postavljanje zadovoljava neku od sljede¢ih relacija:

āi,j + āi,j+1 + āi,j+2 + āi±1,j +1 = 0 i **āi,j + āi+1,j + āi+2,j + āi** +1, **j±1**	4

= 0 gdje koristimo iste oznake kao i u dokazu Teoreme 2.3.1. Iz navedenih relacija direktno moºemo zaklju£iti da u traºenoj grupi homologija poplo£avanja vrijedi

āi+2,j = āi,j = āi,j+2 za svako **i** i **j**	21

. Nadalje, ā1,1, ako je i − j ≡ 0 āi,j = {ā1,2, ako je i − j ≡ 1 kao ²to je prikazano na Slici 2.19. (mod 2), (mod 2), Slika 2.19: Bojanje ekvivalentnih ¢elija torusne mreºe Postavljaju¢i T tetromino oblik na datu torusnu mreºu sa ekvivalentnim ¢elijama, dobijamo jednu od sljede¢e dvije relacije 3ā1,1 + ā1,2 3ā1,2 + ā1,1 = 0 i = 0. 50 Nadalje, traºena grupa homologija je izomorfna sa grupom G⟨ā1,1|8ā1,1 = 0⟩ ~= Z8. Na²a mreºa ima 2m ¢elija ā1,1 i ā1,2, gdje je k = (2m + 1)(2n + 1). Element koji odgovara na²oj mreºi Θ = 2kā1,1 + 2kā1,2 = −4kā1,1 = 4ā1,1 je netrivijalni element grupe homologija poplo£avanja, to traºeno poplo£ava- nje ne postoji. Teorema 2.3.3 Kvadratna torusna mreºa dimenzije (4m + 2) × (4n + 2) ne moºe se poplo£ati s X heksominima. Slika 2.20: X heksomino Dokaz: Razmotrimo kvadratnu torusnu mreºu modela u ravni dimenzije (4m + 2) × (4n + 2) kao ²to je prikazano na Slici 2.17. Ispitajmo sva mogu¢a horizontalna postavljanja X heksomina na datu torusnu mreºu. Svako od njih zadovoljava jednu od sljede¢ih relacija ăi,j + ăi,j+1 + ăi,j+2 + ăi,j +3 + ăi+1,j+1 + ăi−1,j +1 = 0 | 4

, (2.3) gdje su redovi i kolone imenovani analogno kao i u dokazu Teoreme 2.3.1. Iz (2.3) dobijamo da su u grupi homologija traºenog poplo£avanja zadovoljene jednakosti ăi,j = ăi,j+4 za svako i i j. Odnosno ăi,4n−1 = ăi,1, ăi,4n = ăi,2, ăi,4n+1 = ăi,3 i ăi,4n+2 = ăi,4 nadalje dobijamo da za svako i i j je također zadovoljeno ăi,j = ăi,j+2. Analogno, razmatranjem svih vertikalnih postavljanja slijedi da je ăi,j = ăi+2,j za svako i i j. Ekvivalencija ¢elija na datoj torusnoj mreºi u grupi homologija traºenog poplo£avanja prikazana je na Slici 2.21. 51 Slika 2.21: Bojanje ekvivalentnih ¢elija date kvadratne torusne mreºe Nadalje, zaklju£ujemo da je grupa homologija traºenog poplo£a- vanja koli£ni£ka grupa slobodne Abelove grupe sa £etiri generatora G⟨ă1,1, ă1,2, ă2,1, ă2,2⟩ i sa zadovoljenim sljede¢im relacijama 2ă1,2 +

2ă2,1 + 2ă2,2 2ă1,1 + 2ă2,1 + 2ă2, 2 2ă1 ,1 + 2ă1,2 + 2ă2 ,2 2ă1 ,1 + 2ă1 | 41

,2 + 2ă2,1 = 0, = 0, = 0, = 0. Razmotrimo sada prezentaciju grupe homologija od traºenog poplo£a- vanja koriste¢i sljede¢e generatore

ă1,1, ă1 ,2, b = ă1,2 + ă2,1 + ă2,2 i c = ă1,1 + ă1,2 + ă2,1 | 30

. Gore navedene relacije s novim generatorima daju 2b = 2c = 2ă1,2 = 2ă1,1. Odnosno, slijedi da je traºena grupa homologija na²eg poplo£avanja G⟨ă1,1, ă1,2, c, b|2c = 2b = 2ă1,1 = 2ă1,2 = 0⟩ ∼= (Z2)4 . Odavde slijedi da je element koji odgovara ovoj mreºi Θ = (2k + 1)ă1,1 + (2k +

1)ă1,2 + (2k + 1)ă2,1 + (2k + 1)ă2,2 = 2m(ă1, 1 + ă1, 2 + ă2,1 + ă2, 2) + ă1, | 24
1 + ă1,2 + ă2,1 + ă2 ,2 = ă1, 1

+ b netrivijalni element u traºenoj grupi homologija, prema tome traºeno poplo£avanje ne postoji. 52 Napomena 2.3.2 Do istog zaklju£ka moºemo do¢i bojanjem torusne plo£e kao na Slici 2.21. Svaki dio prekriva 2 plave ¢elije, 2 crvene i 2 zelene ili 2 plave, 2 ºute i 2 zelene ili 2 crvene, 2 ºute i 2 zelene ili 2 plave, 2 crvene i 2 zelene ¢elije. Broj ¢elija u svakoj boji je neparan, i svaki dio prekriva paran broj ¢elija u svakoj boji, pa na osnovu toga moºemo zaklju£iti da je poplo£avanje nemogu¢e. Razmotrimo sada neke od rezultata na povr²ima sa granicom. Kao ²to smo ve¢ mogli vidjeti, topolo²ka svojstva su zna£ajna za grupe homologija traºenog poplo£avanja. Primjer 3 Kvadratna torusna mreºa dimenzije 9 × 5 sa jednim uklonjenim poljem na mreºi se ne moºe poplo£ati sa kvadratom dimenzije 2 × 2 i krstom prikazanim na slici. Sve orijentacije postavljanja poliomino oblika su dozvoljene. Rje²enje: Neka je dat kvadratni model torusne mreºe dimenzije 9 × 5 sa jednim uklonjenim poljem na datoj torusnoj mreºi. Naprimjer, neka je to ¢elija kao ²to je prikazano na Slici 2.22. Slika 2.22: Torusni model mreºe sa jednim uklonjenim poljem Imenujemo li ¢elije na na£in prikazan na Slici 2.23 zaklju£ujemo da smo proizvoljno uklonili ¢eliju a3,5. 53 Slika 2.23: Imenovanje ¢elija na torusnoj mreºi 9 × 5 Postavimo dva kvadrata dimenzije 2 × 2 na datu torusnu mreºu kao ²to je prikazano na Slici 2.24. Tada vrijede sljedeçe relacije

a1,1 + a1,2 + a2,1 + a2,2 = 0, a3, **3 + a3** ,4 + a4, **3** + a4,4 = **0. (2**	33

.4) (2.5) Slika 2.24: Postavljanje kvadrata 2 × 2 na torusnu mreºu 9 × 5 Zatim postavimo oblik krsta kao ²to je prikazano na Slici 2.25 i Slici 2.26. Na osnovu postavljanja oblika krsta kao datim slikama slijedi da vrijede sljedeçe relacije:

a1,2 + a2,1 + a2,2 + a2,3 + a3,2 = 0, a2, **3 + a3** ,2 + a3, **3** + a3, **4 + a4**	29

,3 = 0. (2.6) (2.7) 54 Slika 2.25: Postavljanje krsta na torusnu mreºu 9 × 5 - slu£aj 1 Slika 2.26: Postavljanje krsta na torusnu mreºu 9 × 5 - slu£aj 2 Iz relacija (2.4), (2.5), (2.6) i (2.7) slijedi da su çelije a1,1 i a4,4 ekvivalentne u traºenoj grupi homologija, tj. vrijedi da je a1,1 = a4,4 (Slika 2.3). Slika 2.27: Ekvivalencija çelija a1,1 i çelije a4,4 Analogno dobijamo da vrijedi: a4,4 = a2,7 = a5,1 = a3,4, a1,1 = a4,7 = a2,1 = a5,4 = a3,7, a5,1 = a2,4 = a4,1, a4,1 = a1,4 = a5,7, a4,1 = a1,7. Zaklju£ivanjem na isti na£in slijedi da su çelije

a1,2, a2,2, a3,2, a4,2, a5,2, a1 ,4, **a2** ,4, **a3** ,4, **a4** ,4, **a5** ,4, **a1** ,7, **a2** ,7, **a3** ,7, **a4** ,7 i **a5**	12

,7 mežusobno ekvivalentne, odnosno da su sve generisane generatorom a1,2 u traºenoj grupi homologija. Analogno slijedi da su çelije

a1,3, a2,3, a3,3, a4,3, a5,3, a1 ,6, **a2** ,6, **a3** ,6, **a4** ,6, **a5** ,6, **a1** ,9, 55 **a2** ,9, **a3** ,9, **a4** ,9 i **a5**	12

,9 mežusobno ekvivalentne, odnosno da su sve generisane generatorom a1,3 u traºenoj grupi homologija. Zamjenjujuçi çelije njihovim generatorima dobijamo ekvivalenciju çelija i bojanje kvadratne torusne mreºe 9 × 5 kao ²to je prikazano na Slici 2.28. Slika 2.28: Ekvivalencija çelija i bojanje kvadratne torusne mreºe 9 × 5 Postavimo li date poliomino oblike na tako dobijenu kvadratnu torusnu mreºu dobijamo da su u traºenoj grupi homologija zadovoljene sljedeçe relacije: 2a1,1 + 2a1,2 = 0, 2a1,2 + 2a1,3 = 0, 2a1,1 + 2a1,3 = 0, 3a1,2 + a1,1 + a1,3 = 0, 3a1,3 +

a1,1 + a1,2 = 0 , 3a1, **1** + a1, **2 + a1,3 = 0**	45

. Na osnovu dobijenih relacija slijedi da je traºena grupa homologija izomorfna sa grupom G(

a1,1, a1,2, a1,3 |2a1, 1 = 2a1,2 = 2a1, 3 = a1,1 + a1,2 + a1,3 31

= 0⟩. Data torusna mreºa sadrºana je od 15 ¢elija a1,1, 15 ¢elija a1,2 i 14 ¢elija a1,3. Element koji odgovara datoj torusnoj mreºi Θ = 15a1,1 + 14a1,2 + 15a1,3 = a1,1 + a1,3 (2.8) je netrivijalan element grupe homologija poplo£avanja, to traºeno poplo£a- vanje ne postoji. Sada ¢emo dati prikaz nekoliko rezultata dobijenih za poplo£avanja na ? kompleksnijim povr²ima sa granicom. Razmotrimo prvo poplo£avanje sa I i Z tetrominima na neorijentabilnoj povr²i roda 6. Sada ¢emo dati prikaz dobijenih rezultata objavljenih u [50], Teorema 3.4. Teorema 2.3.4 Kvadratna mreºa na neorijentabilnoj povr²i roda 6 sa gra- nicom formirana identi kacijom strana dodekaugaonog poligona koji sadrºi po pet 4k × 4k kvadrata sa uklonjenim ugaonim poljima kao na Slici 2.29 ne moºe se poplo£ati sa I tetrominima i Z tetrominima. 56 Slika 2.29: Kvadratna mreºa na neorijentabilnoj povr²i roda 6 s granicom Dokaz: Neka su ¢elije na kvadratnoj mreºi date povr²i ozna£ene kao na Slici 2.29. Identi kacijom vrhova na poligonalnom modelu date povr²i zaklju£ujemo da su ¢elije a1,1, a1,4k, a4k,1, a4k,4k, a4k+1,8k+1, a4k+1,12k, a4k+1,1, a4k+1,4k, a4k+1,4k+1, a4k+1,8k, a8k,8k+1, a8k,12k, a8k,1, a8k,4k, a8k,4k+1, a8k,8k, a8k+1,1, a8k+1,4k, a12k,1 i a12k,4k obrisane, u topolo²kom smislu, nakon lijepljenja one zajedno £ine jedan disk, tj. date ¢elije su predstavnici iste klase vrhova. Stoga, razmotrimo datu neorijenatabilnu povr² roda 6 sa datim lijepljenjem i sa jednom grani£nom komponentom. Koriste¢i I tetromino je lako zaklju£iti da u grupi homologija traºenog poplo£avanja vrijedi āi,j = āi+4,j i āi,j = āi,j+4. Postavljanjem Z tetromina bit ¢e zadovoljena jedna od sljede¢e dvije relacije

āi,j+āi +1, j+āi+1,j +1+ āi +2, j+1 = 0 i āi+1,j+āi +1, j +1+ āi+2,j+1+āi+2,j+2 4

= 0. 57 Odakle slijedi āi+2,j+2 = āi,j. Razmotrimo li postavljanje I tetromina na presjek stranice d lako se vidi da vrijedi ā4k+2,8k+1 = ā12k−3,2, ā4k+2,8k+2 = ā12k−2,2, ā4k+2,8k+3 = ā12k−1,2 i ā4k+2,8k+4 = ā12k,2. Sa gore datim relacijama dobijamo ekvivalencije u grupi homologija traºenog poplo£avanja kao ²to su prikazane na Slici 2.30. Slika 2.30: Bojanje ekvivalentnih ¢elija u kvadratnoj mreºi na neorijentabil- noj povr²i roda 6 sa granicom Nadalje, grupa homologija poplo£avanja je koli£ni£ka slobodna Abelova grupa sa £etiri generatora ā1,2, ā1,3, ā2,3, ā2,4 odrežena sa sljede¢im relacijama 58 ā1,2 + ā1,3 + ā2,3 + ā2,4 = 0, 2ā1,2 + 2ā1,3 = 0, 2ā1,3 + 2ā2,3 = 0, 2ā2,3 + 2ā2,4 = 0, 2ā1,2 + 2ā2,4 = 0. Eliminacijom generatora ā2,4 iz date prezentacije i razmatranjem genera- tora

ā1,3, b = ā1,2 + ā1,3 i c = ā1 ,3 + ā2, 3 54

, dobijamo da na²a grupa homologija je izomorfna sa Z ⊕ Z22. Na²a kvadratna mreºa sadrºi 20k2 ¢elija ā1,2, 5(4k2 − 1) ¢elija ā1,3 i ā2,4, kao i 10(2k2 − 1) ¢elija ā2,3. Element koji odgovora datoj mreºi Θ = 20k2ā1,2 + 5(4k2 − 1)ā1,3 + 10(2k2 −

1)ā2,3 + 5(4k2 − 1)ā2,4 = 20k2(ā1 ,2 + ā1 ,3 + ā2 ,3 + ā2 5

,4) − 5ā1,3 − 10ā2,3 − 5ā2,4 = 5ā1,2 − 5ā1,3 = b − 10ā1,3 je netrivijalan element traºene grupe homologija i traºeno poplo£avanje nije moguçe. Teorema 2.3.5 Kvadratna mreºa na neorijentabilnoj povr²i roda 4 sa gra- nicom formirana identi kacijom strana dodekaugaonog poligona koji sadrºi po pet 4k × 4k kvadrata sa uklonjenim ugaonim çelijama kao na Slici 2.31 ne moºe se poplo£ati sa L tetrominima. Dokaz: Model na Slici 2.31 poslije lijepljenja duº ozna£enih strana i brisanja 20 ugaonih çelija daje neorijentabilnu povr² roda 4 sa tri grani£ne komponente. Ozna£imo çelije u mreºi kao u prethodnom primjeru. Postavljajuçi L tetromino u dati model u vertikalnom poloºaju uzimanja u obzir identi kaciju granice topolo²ke povr²i dobijamo sljedeçe dvije relacije āi,j +

āi+1,j + āi+2,j + āi+2,j−1	= 0 i (	**2**	.9) āi,	**j + āi**	+1,	**j + āi+2,j + āi+2,j**		11

+1 = 0 (2.10) u grupi homologija poplo£avanja. Iz (2.9) i (2.10) dobijamo da su u grupi homologija ovog poplo£avanja çelije āi,j−1 i āi,j+1 ekvivalentne. Analogno, slijedi da su çelije āi−1,j i āi+1,j ekvivalentne u grupi homologija ovog poplo£avanja. 59 Slika 2.31: Kvadratna mreºa na neorijentabilnoj povr²i roda 4 sa tri grani£ne komponente Saºmimo sve gornje jednakosti çelija u ā1,1, ako je i ≡ 1 (

mod 2), j ≡ 1 (mod 2	), āi,	**j**	= ⎧ā1,	**2**	, ⎪⎨ā2,	**1**	, ā2,	**2**			6

, ako je i ≡ 1 ako je i ≡ 0 ako je

i ≡ 0 (mod 2), j ≡ 0 (mod 2), j ≡ 1 (mod 2), j	≡ 0 (	**mod 2**	), (mod	**2**		18

), (mod 2). Razmotri ⎩m⎪o postavljanje L-tetromina duº stranice ozna£ene sa e na Slici 2.31 i odgovarajuçih jedna£ina u grupi homologija poplo£avanja

ā1,1 + ā1,2	+ ā2,	**1 + ā1,2**	= 0 i	**ā2,1**	+ ā1,	**2 + ā2,1**	+ ā1,	**2**	5

= 0. 60 Iz prethodnih relacija zaklju£ujemo da je ā1,1 = ā2,1. Na sli£an na£in dobijamo da je ā1,2 = ā2,2. Dobijene ekvivalencije su date na Slici 2.32. Slika 2.32: Ekvivalencija çelija i bojanje kvadratne torusne mreºe na neorijentabilnoj povr²i roda 4 sa granicom Postavaljuçi L tetromino na mreºu sa ekvivalentnim çelijama, uklju£ujuçi preklapanja gdje se lijepe strane, dobijamo jednu od sljedeçih relacija 3ā1,1 + ā1,2 = 0 i 3ā1,2 + ā1,1 = 0. Sada moºemo zaklju£iti da je 8ā1,1 = 0. Nadalje, grupa homologija je izomorfna grupi G⟨ā1,1|8ā1,1 = 0⟩ ∼= Z8. 61 Na²a kvadratna mreºa sadrºi 10(4k2 − 1) çelija a1,2 i a1,3, to je dodijeljeni element na ovoj mreºi Θ = 10(4k2 − 1)ā1,1 + 10(4k2 − 1)ā1,2 = 4ā1,2 netrivijalan element u traºenoj grupi homologija poplo£avanja, pa poplo£a- vanje nije moguçe na datoj mreºi sa L-tetrominima. Teorema 2.3.6 Kvadratna mreºa na neorijentabilnoj povr²i roda 3 sa gra- nicom formirana identi kacijom strana dodekaugaonog poligona koji sadrºi po pet 4k × 4k kvadrata sa uklonjenim ugaonim poljima kao na Slici 2.33 ne moºe se poplo£ati sa T tetrominima. Dokaz: Slika 2.33: Kvadratna mreºa na orijentabilnoj povr²i roda 3 sa granicom 62 Lako je provjeriti da model na Slici 2.33 poslije lijepljenja duº ozna£enih stranica i brisanja 20 ugaonih ¢elija daje povr² sa grani£nim komponentama. Ozna£imo ¢elije kao u prethodnom teoremu. Sljede¢e jednakosti je lako dobiti ā1,1, ako je āi,j = {ā1,2, ako je

i − j ≡ 0 (mod 2), i − j ≡ 1 (mod 2	52

), kao ²to je prikazano i na Slici 2.34. Slika 2.34: Bojanje ekvivalentnih ¢elija u kvadratnoj mreºi na orijentabilnoj povr²i roda 3 sa granicom Postavimo li T tetromino na mreºu sa ekvivalentnim ¢elijama, jednako postavljaju¢i i na mjestima na kojima se lijepe stranice, dobijamo sljede¢e 63 relacije 3ā1,3 + ā1,2 = 0 i 3ā1,2 + ā1,3 = 0. Nadalje, dobijamo da je traºena grupa homologija izomorfna sa grupom G⟨ā1,2|8ā1,2 = 0⟩ ∼= Z8. Na²a kvadratna mreºa sadrºi 10(4k2 − 1) ¢elija ā1,2 i 10(4k2 − 1) ¢elija ā1,3, to znak elementa ovog poplo£avanja na datoj mreºi je Θ = 10(4k2 − 1)ā1,2 + 10(4k2 − 1)ā1,3 = 40k2ā1,2 − 10ā1,2 − 120k2ā1,2 + 30ā1,2 = 4ā1,2. Θ je netrivijalan element u traºenoj grupi homologija poplo£avanja, i nadalje zaklju£ujemo da je poplo£avanje nemogu¢e na datoj kvadratnoj mreºi kori- ste¢i T tetromino. Teorema 2.3.7 Kvadratna mreºa na orijentabilnoj povr²i roda 2k − 1 sa granicom formirana identi kacijom strana (8k − 4) ugaonika i koja sadrºi 2k2 − 2k + 1 kvadrata od (4k − 3)d strana, gdje je d pozitivan cijeli broj, sa uklonjenim ugaonim ¢elijama kao na Slici 2.35 ne moºe se poplo£ati sa 1 × (4k − 3) poliomino oblikom. 64 Slika 2.35: Kvadratna mreºa na orijentabilnoj povr²i roda 2k−1 sa granicom Dokaz: Sa Slike 2.35 je jasno da je data pov² orijentabilna. Kao i sa drugim I minima jednostavno slijedi da je āi,j = āi,j+4k−3 = āi+4k−3,j. Koriste¢i ove relacije dobijamo da postoji (4k − 3)2 tipova ¢elija āi,j, 1 ≤ i, j ≤ 4k − 3 u traºenoj grupi homologija poplo£avanja. Uo£imo da dobijamo 8k − 6 relacija 4k−3 āi,j = 0 za i = 1, . . . , 4k − 3 i ∑j=1 4k−3 āi,j = 0 za j = 1, . . . , 4k − 3 ∑i=1 dodijeljenih postavljanjima 1×(4k−3) poliomino dijela na tablu (uklju£uju¢i postavljanja preko zalijepljenih strana). Nadalje, na²a grupa homologija poplo£avanja je izomorfna sa G⟨ai,j |1 ≤ i, j ≤ 4k − 4⟩ ∼= Z16(k−1)2 . 65 Element Θ dodijeljen datoj mreºi je 4k−4 4k−4 Θ = −(2k − 1) āi,j . ∑i=2 ∑j=2 On predstavlja netrivijalan element u traºenoj grupi homologija poplo£ava- nja, te na osnovu toga slijedi dokaz date tvrdnje. 66 Glava 3 Simplicijalni kompleksi p oplo £avanja Prou£avanjem simplicijalnih kompleksa napravljena je neraskidiva veza izmežu geometrije i kombinatorike kao matemati£kih grana. U geometrij- skom smislu simplicijalni kompleksi u raºli£itim dimenzijama £ine: ta£ke, duºi, trouglove, tetraedre, itd. Kao takvi objekti skupa £ine jednu familiju koju nazivamo simplicijalni kompleksi. Geometrijski simplicijalni kompleksi predstavljaju homeomorfne objekte kompaktnim potprostorima Euklidskih prostora, pa predstavljaju interesantnu temu prou£avanja u algebarskom, topolo²kom i kombinatornom smisli. U ovom poglavlju dat ¢emo pregled osnovnih svojstava simplicijalnih kompleksa, te povezati simplicijalne komplekse sa poliomino poplo£avanjima. Izlaganje datih osobina bazirano je na [4], [12], [14], [30], [64], [59], [60] i [61]. 3.1 Simplicijalni kompleksi U ovom odjeljku dat ¢emo pregled osnovnih de nicija i tvrdnji koje se odnose na simplicijalne komplekse. De nicija 3.1.1 n-

simpleks ∆n je konveksan omota£ skupa od n+1 ta£aka koji ne leºe **u istoj hiperravni u**	1

Rn. 67 Slika 3.1: Primjeri simplicijalnih kompleksa Pljosan

ili maksimalni simpleks je strana simplicijalnog kompleksa K koja nije strana simpleksa ve¢e dimenzije 1

. De nicija 3.1.2

Apstraktni simplicijalni kompleks na skupu S je kolekcija K podskupova od S takva da za svako σ ∈ K 1 vaºi da svi podskupovi od σ (uklju£ uju¢i i ∅) pripadaju K. Podskup σ ∈ K nazivamo (apstraktni) simpleks od K. Jednoelementni podskupovi se nazivaju vrhovi od K. Ukoliko K sadrºi sve jednoelementne podskupove od S kaºemo da je K simplicijalni kompleks na skupu vrhova S.

Dimenzija apstraktnog simpleksa σ ∈ K je dimσ = | σ | − 1, dimenzija apstraktnog simplicijalnog kompleksa je maksimalna dimenzija od dimenzija njegovih simpleksa . De nicija 3. 1 .3 Kolekcija L koja je podskup apstraktnog simplicijalnog kompleksa K koja je sama za sebe simplicijalni kompleks naziva se sim- plicijalni potkompleks od K

. De nicija 3.1.4 Ulaganje simplicijalnog kompleksa K u Rd je injektivno preslikavanje i : |K| → Rd.

Geometrijska realizacija apstraktnog simplicijalnog kompleksa K na S je poliedar |K| za koji postoji 1 bijekcija izmežu skupa S i skupa vrhova od |K| koja simplekse iz K ²alje na strane iz |K|. Prostor X takožer zovemo poliedrom ukoliko postoji simplicijalni kompleks K i homeomor zam h : |K| → X. Za K kaºemo da je triangulacija prostora X. Ozna£imo sa [m] skup {1,2,...,m }. De nicija 3. 1

.5

Geometrijski simplicijalni kompleks ili poliedar je podskup ta£aka P ⊂ Rn koji predstavlja 1

kona£nu uniju U simpleksa bilo koje dimenzije takvu da su ispunjeni sljede¢ i uslovi: (1) Svaka strana simpleksa iz U pripada U ; (2) Presjek bilo koja dva simpleksa iz U je strana svakog od njih. 68

Simpleks iz U se naziva stranom od P , 0 dimenzionalne stranice zovemo vrhovima, a 1 dimenzionalne stranice ivicama. Dimenzija geometrijskog simplicijalnog kompleksa P je maksimalna dimenzija od dimenzija njegovih strana

. Propozicija 3.1.1 Apstraktni simplicijalni kompleks K na skupu vrhova [m] posjeduje geometrijsku realizaciju. 3.2 Simplicijalni kompleksi asocirani poliomino poplo£avanjima U ovom odjeljku uvest ¢emo simplicijalne komplekse asocirane sa polio- mino poplo£avanjima, te ispitati osnovna svojstva tako dobijenih simplicijal- nih kompleksa poplo£avanja. De nicija 3.2.1 Postavljanje k poliomina na mreºu M bez preklapanja ili izlazaka van mreºe nazivamo pravilnim. Sva pravilna postavljanja imaju strukturu simplicijalnog kompleksa gdje (k − 1) simpleksi odgovaraju pravilnom postavljanju k poliomina. Ova struktura je jasno zatvorena za podskupove jer uklanjanjem nekog broja pravilno postavljenih domina iz pravilnog postavljanja i dalje imamo domine koje se ne preklapaju. Ova opservacija va°i generalno za skup poliomina oblika Σ koji postavljamo na region sa mre°om M. De nicija 3.2.2 K(M;Σ) je simplicijalni kompleks £iji vrhovi odgovaraju pravilnom postavljanju jednog poliomina na M, a k-simpleksi odgovaraju pravilnom postavljanju k+1 poliomino oblika na region M. Primjer 4 Geometrijska interpretacija simplicijalnog kompleksa asociranog poplo£avanjem table dimenzije 2 × 3 sa dominom. Rje²enje: Neka je data tabla dimenzije 2 × 3. Razmotrimo moguça postavljanja domine (I2 poliomino oblika) na datu tablu. 69 Slika 3.2: Geometrijska interpretacija simplicijalnog kompleksa koji nastaje postavljanjem domine na tablu 2 × 3 Svako moguçe postavljanje domine predstavljat çe jedan vrh simplicijal- nog kompleksa poplo£avanja ili drugim rije£ima 0-simpleks. Ukoliko pored prvog postavljenog poliomino oblika mo°emo dodati jo² jedan takav dobijamo 1-simpleks ili ivicu simplicijalnog kompleksa poplo£avanja. Nastavimo li sa dodavanjem poliomino oblika dobivat çemo simplekse veçe dimenzije. Na Slici 3.2 dajemo prikaz geometrijske interpretacije simplicijalnog kompleksa poplo£avanja asociranog poplo£avanjem table 2×3 sa dominom. Ovi simplicijalni kompleksi nose va°ne informacije o odnosu M i Σ. ? Sljedeça osobina je o£igledna iz de nicije K(M;Σ). Propozicija 3.2.1 Maksimalni broj poliomina iz skupa Σ koji se mo°e postaviti na M jednak je dimK(M;Σ)+1. Na osnovu de nicije simplicijalnog kompleksa poplo£avanja ivice datog simplicijalnog kompleksa poplo£avanja odgovaraju postavljanjima poliomino oblika koji se mežusobno ne sijeku. Mežutim, ako uzmemo skup postavljanja poliomina koji se mežusobno ne sijeku oni po de niciji razapinju simpleks u K(M;Σ) pa je on po de niciji ag. Flag svojstvo simplicijalnih kompleksa je prou£avano u [21] i [36]. Propozicija 3.2.2 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja K(M;Σ) su ag kompleksi. 70 3.3 f , g i h vektori simplicijalnih kompleksa poplo£avanja Sada çemo de nisati neke od invarijanti simplicijalnih kompleksa. De nicija 3.3.1 f vektor od (n − 1) dimenzionalnog simplicijalnog kom- pleksa K n−1 je cjelobrojni vektor f(Kn−1) = (f−1,f0,f1,f2,...,fn−1), gdje je f−1 = 1 i fi = fi(Kn−1) ozna£ava broj i lica od Kn−1 za svako i = 1, 2, . . . , n − 1. De nicija 3.3.2 Neka je dat simplicijalni kompleks Kn−1. h vektorom od Kn−1 zovemo cjelobrojni vektor h(Kn−1) = (h0,h1,...,hn−1), gdje su hi de nisani jedna£inom

h0tn + . . . + hn−1t + hn = (t − 1)n + f0(t − 1)n−1 + . . . + fn−1 , gdje je **f** (Kn−1) = (**f** 28

−1, f0, f1, f2, . . . , fn−1). De nicija 3.3.3 Neka je dat simplicijalni kompleks Kn−1. Niz (g0, g1, . . . , g⌊n2⌋), gdje gi = hi − hi−1, i > 0, a hi predstavljaju vrijednosti h vektora, se naziva g vektorom simplicijalnog kompleksa Kn−1. Za vi²e o g vektoru pogledati [79]. f vektori simplicijalnih kompleksa opisuju broj na£ina da postavimo k razli£itih poliomina iz Σ u M bez preklapanja. Generalno, ovi kompleksi su komplikovani i za jednostavne primjere, a mi çemo u ovom istra°ivanju da se baziramo najvi²e na najjednostavnijim slu£ajevima kada je skup Σ skup domina i/ili jednostavnijih poliomino oblika, a region M plo£a (mre°a) dimenzija m×n u ravni ili na torusu. Odgovarajuçe simplicijalne komplekse u ravni obilje°avaçemo sa KPs(Dm×n), a na torusu sa KPs(Tm×n), gdje P predstavlja ime poliomino oblika koji postavljamo, a s broj jedini£nih kvadrata od kojih se dati poliomino oblik sastoji. Razmotrimo prvo simplicijalne komplekse koji se mogu razapeti na tabli 1×n u ravni. U sljedeçem primjeru ilustrovat çemo ideju i na£in razapinjanja simplicijalnog kompleksa na datoj tabli. Primjer 5 f vektor simplicijalnog kompleksa KI2(D1×6) dat je sa f(KI2(D1×6)) = (5,6,1). 71 Rje²enje: Neka je data kvadratna tabla dimenzije 1 × 6. Razmotrimo sva moguça postavljanja domine (I2 poliomino oblika) na datu tablu. Broj razli- £itih postavljanja domine na datu tablu predstavljat çe vrhove simplicijalnog kompleksa koji se na datoj tabli razapinje postavljajuçi dominu, tj. f0 = 5. Stranice simplicijalnog kompleksa predstavljat çe mjesta gdje se dvije domine mogu postaviti bez presijecanja. Dvije domine bez presijecanja moºemo postaviti u sljedeçim slu£ajevima: {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 4}, {2, 5} i {3, 5}, tj. f1 = 6. Stranice simplicijalnog kompleksa ili 2- simplekse predstavljat çe moguça postavljanja tri domine na datu tablu bez presijecanja. Uo£imo takva moguça postavljanja domine na datu tablu. Analizom svih mogućih slu£ajeva dobijamo da je moguçe samo jedno takvo postavljanje {1, 3, 5}, tj. f2 = 1. Prisjetimo se Leme 3.3.1 ? Lema 3.3.1 Broj

rje²enja jedna£ine x1 + x2 + . . . + xk = n (3.1) **u skupu** nenegativnih cijelih **brojeva je**	35

n+k−k−11 . Dokaz Leme moºe se pronaçi u [5]. ( ) Teoremom 3.3.1 dajemo generalnu tvrdnju i njen dokaz za odreživanje f vektora simplicijalnog kompleksa koji se razapinje na tabli dimenzije 1 × n postavljanjem na nju I-omina sa m jedini£nih kvadrata. Teorema 3.3.1 f vektor simplicijalnog kompleksa KIm(D1×n) dat je sa n − m(k + 1) + k + 1 fk(KIm(D1×n)) = k + 1 . ( ) Dokaz: Neka je data tabla 1 × n. Razmotrimo sva moguça postavljanja poliomino oblika 1 × m na datu tablu. Jedan poliomino oblik na datu tablu moºemo postaviti na n − (m − 1) razli£itih na£ina. Postavljanje k + 1 1 × m poliomina na tablu indukuje k + 2 negativnih cijelih brojeva a1, a2,. . ., ak+2 koji zadovoljavaju jedna£inu (3.2), gdje je ai broj neprekrivenih polja izmežu i-tog i (i + 1)-og poliomina gledano s lijeva na desno. Tada vrijedi a1 + a2 + a3 + . . . + ak+2 = n − mk − m. (3.2) 72 Broj razli£itih k-simpleksa od KIm(D1×n) jednak je broju nenegativnih cjelobrojnih rje²enja jedna£ine (3.2). Na osnovu Leme 3.3.1 slijedi da je broj razli£itih rje²enja prethodne jedna£ine jednak fk(KIm(D1×n)) = n−

m(k+1)+k+1 . (k+1) Za **m** = 2 **i m**	50

= 3 dobijamo da je fk(KI2(D1×n)) = n − k − 1 i fk(KI3(D1×n)) = n − 2k − 2 . (k + 1) (k + 1) Razmotrimo sada slu£aj kada dominu postavljamo na kvadratnu torusnu mreºu dimenzije 1×n. U tu svrhu razmotrimo prvo na primjeru razapinjanja takvog simplicijalnog kompleksa na kvadratnu torusnu mreºu dimenzije 1×6. Primjer 6 f vektor simplicijalnog kompleksa KI2(T1×6) dat je sa f(KI2(T1×6)) = (6,9,2). Rje²enje: Neka je data kvadratna torusna mreºa dimenzije 1 × 6. Analogno primjeru razapinjanja simplicijalnog kompleksa na tablu odredimo vrhove simplicijalnog kompleksa na torusu, tj. f0 = 6. 1 simpleksi traºenog simplicijalnog kompleksa su: {1, 3}, {1, 4}, {1, 5}, {2, 4}, {2, 5}, {2, 6}, {3, 5}, {3, 6} i {4, 5}, a 2 simpleksi su dati sa {1, 3, 5} i {2, 4, 5}. Sljedeçom teoremom dajemo tvrdnju i dokaz odreživanja f vektora ? simplicijalnog kompleksa KIm(T1×n) za I omino sa m jedini£nih kvadrata. Teorema 3.3.2 f vektor simplicijalnog kompleksa KIm(T1×n) dat je sa fk(KIm(T1×n)) = (

m − 1) n + (1 − m)k − m + **n − (m − 1**)(k + **1**) k . ( ) (k + **1**	49

) 73 Dokaz: Neka je data kvadratna torusna mreºa dimenzije 1×n. Razmotrimo moguça postavljanja poliomino oblika 1 × m na datu torusnu mreºu. Razmotrit çemo dva slu£aja. U prvom slu£aju razmotrimo postavljanje poliomino oblika tako da ne sije£e stranicu lijepljena. Slika 3.3: Postavljanje Im poliomina da ne sije£e stranicu lijepljenja Postavljanje k + 1 1 × m poliomina na torusnu mreºu indukuje k + 2 negativnih cijelih brojeva a1, a2,. . ., ak+2 koji zadovoljavaju jedna£inu (3.3), gdje je ai broj neprekrivenih polja izmežu i-tog i i + 1 poliomina gledano s lijeva na desno. Tada vrijedi a1 + a2 + a3

+ . . . + ak+2 = n − mk − m. (3.3) Broj razli£itih k + 1 postavljanja domina na datu torusnu mre°u jednak je broju nenegativnih cjeloborojnih rje²enja jedna£ine (3.3). Na osnovu Leme 3.3.1 slijedi da je broj razli£itih rje²enja prethodne jedna£ine jednak n−(m−1)(k+1) k+1 . U drugom slu£aju razmotrit ¢emo situacije kada poliomino sije£e stranicu l(ijepljenja ka)o ²to je to prikazano na Slici 3.4. To mo°emo uradi na m − 1 na£in i fakti£ki nam ostaje postavljanje k poliomino oblika 1 × m na tablu 1 × (n − m), ²to indukuje jedna£inu a1 + a2 + a3 + . . . + ak+1 = n − mk − m. (3.4) Slika 3.4: Postavljanje poliomina 1 × m da sije£e stranicu lijepljenja 74 Analogno, kao u prvom slu£aju na osnovu Leme 3.3.1 dobijamo da je broj razli£itih cjelobrojnih rje²enja jedna£ine (3.4) jednak n+(1−mk)k−m . Na osnovu rje²enja prvog i drugog slu£aja slijedi ( ) fk(Km(T1×

n)) = (m − 1) n + (1 − **m)k − m k + n** − (m − **1)(k + 1**	39

) . ( ) (k +1) Razmotrimo sada tablu 2 × n i simplicijalne komplekse koji se razapinju postavljenjem domine na datu tablu, tj. KI2(D2×n). U sljede¢oj tabeli dajemo prikaz f-vektora za neke konkretne vrijednosti broja n. Tabela 3.1: Pregled f vektora simplicijanlog kompleksa KI2(D2×n) za neke konkretne vrijednosti n n

f0 f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 2 4 **2** 3 7 11 **3**	40

4 10 29 26 5 5 13 56 94 56 8 6 16 92 234 263 114 13 7 19 137 473 815 667 223 21 8 22 191 838 1982 2504 1577 424 34 Propozicija 3.3.1 f0(D2×n) = 3n − 2, fn−1(D2×n) = n−1 2 aian−1−i + 2 n−2 aian−1−j f1(D2×n) = 9n2 − 27n + 22 ∏i=0 0≤i<∏j≤n−1 Dokaz: Razmotrimo mogu¢a postavljanja domina na datu tablu dimenzija 2 × n. Svaka mogu¢nost postavljanja domina na tablu 2 × n predstavlja jedan vrh simplicijalnog kompleksa. Domine mo°emo postaviti u prvom ili drugom stupcu kao ²to je prikazano na sljede¢im slikama. 75 Slika 3.5: Postavljanje domina u 1.Slika 3.6: Postavljanje domina u 2. stupac stupac Unutar svakog stupca uspravno dominu mo°emo postaviti na n−1 na£ina, tj. uspravno dominu mo°emo postaviti na 2(n − 1) na£ina. U vodoravnom postavljanju dominu mo°emo postaviti na n na£ina. Slika 3.7: Postavljanja domina horizontalno Na osnovu £ega mo°emo zaklju£iti da je ukupan broj vrhova simplicijalnog kompleksa koji mo°emo razapeti na tabli 2 × n jednak 2(n − 1) + n = 2n − 2 + n = 3n − 2. Odredimo broj ivica simplicijalnog kompleksa koji se mo°e razapeti na tabli 2 × n. U tu svrhu razmatrat ¢emo postavljanja domina na tablu uspravno-uspravno (UU), uspravno-vodoravno (UV), vodoravno-vodoravno (VV). Posmatramo li mogu¢e kombinacije postavljanja domina UU, tada u svaki stupac mo°emo postaviti n − 1 dominu. Odnosno, na cijelu tablu mo°emo postaviti (n − 1)2 na£ina. Horizontalno dominu na tabli 2 × n mo°emo postaviti na n2 na£ina. Preostaje nam jo² razmotriti mogu¢nosti kombinacija UV. U prebrojavanju UV kombinacija mo°emo razmotriti dvije ( ) 76 situacije, kada se domina postavi vertikalno da prekriva prvo ili zadnje polje u stupcu i kada se nalazi u sredini vertikalno postavljena domina. U slu£aju kada se domina vertikalno postavi tako da prekrije prvo ili zadnje polje u stupcu na tablu mo°emo staviti 4(n − 2) domina. Ako se vertikalno postavljena domina nalazi negdje u sredini tada dominu mo°emo postaviti na 2(n − 2)(n − 3) na£ina. Saberemo li sve dobijene kombinacije dobijamo: f1 = =

n + (n − 1) **2** + 4(**n − 2) + 2(n − 2)(n** − 3) ( ) **2** 9n2 − 27n + 22 **2**	42

. Razmotrimo bo janje table D2×n . Postavimo li na tablu (n − 1) dominu tako da se domine mežusobno ne preklapa ju, tada nam osta je jedno crno i jedno bijelo polje neprekriveno. Ukoliko ob je le°e u (i + 1) koloni tada na tablu 2 × i mo°emo postaviti i domina, a na tablu 2 × (n − i − 1) mo°emo postaviti n − i + 1 dominu. Ako jedna neprekrivena ¢elija le°i u (i + 1)-o j, a druga u (j + 1) koloni, primijetimo da dio ko ji po£inje u (i + 1) a zavr²ava u (j + 1) koloni se mo°e na jedinstven na£in prekriti. Takvim prekrivanjem nam osta ju table 2 × i i 2 × (n − j − 1) £ime je dokazana navedena rekurentna relacija. Razmotrimo sada simplicijalne komplekse poplo£avanja ko ji su asocirani postavljanjem domine na kvadratnu torusnu mre°u. U tu svrhu razmotrimo simplicijalni kompleks Kl2 (T2×3). Primjer 7 f vektor simplicijalnog kompleksa Kl2(T2×3) dat je sa f(Kl2(T2,3)) = (12, 33, 14). Rje²enje: Razmotrimo mogu¢a postavljanja domine na kvadratnu torusnu mre°u dimenzije 2 × 3. Dominu mo°emo postaviti uspravno ({1},{2},{3}), vodoravno ({7},{8},{10},{11}), uspravno kada domina prelazi stranicu lije- pljenja ({4},{5},{6}) i vodoravno kada domina prelazi stranicu lijepljenja ({9}, {12}). Mogu¢a postavljanja domine na datu kvadratnu torusnu mre°u predstav- ljaju 0 simplekse u tra°enom simplicijalnom kompleksu, odnosno dobijamo 77 da je f0 = 12. Analogno kao u prethodnim primjerima dobijamo sljede¢e 1 simplekse: {1,2}, {1,3}, {1,5}, {1,6}, {1,8}, {1,11}, {2,3}, {2,5}, {2,6}, {2,9}, {2,12}, {3,4}, {3,6}, {3,7}, {3,10}, {4,5}, {4,6}, {4,8}, {4,11}, {5,6}, {5,9}, {5,12}, {6,7}, {6,10}, {7,10}, {7,11}, {7,12}, {8,10}, {8,11}, {8,12}, {9,10}, {9,11}, {9,12} . Na osnovu £ega slijedi da je f1 = 33. Nadalje, dobijamo 2 simplekse: {1,2,3}, {1,2,6}, {1,3,5}, {1,5,6}, {1,8,11}, {2,3,4}, {2,4,6}, {2,9,12}, {3,4,5}, {3,7,10}, {4,5,6}, {4,8,11}, {5,9,12}, {6,7,10}. Odakle slijedi da je f2 = 14. U sljede¢oj tabeli dajemo pregled f vektora simplicijalnih kompleksa ? poplo£avanja asociranih postavljanjem domina na kvadratnu torusnu mre°u dimenzije 2 × n za neke konkretne vrijednosti n. Tabela 3.2: Pregled f vektora simplicijanlog kompleksa Kl2(T2×n) za neke konkretne vrijednosti n n f0 f1 f2 f3 f4 3 12 33 14 4 16 76 112 36 5 20 136 371 376 102 Propozicija 3.3.2 f0(T2×n) = 4n, f1(T2×n) = 8n2 − 13n. Razmotrimo sada simplicijalni kompleks asociran poplo£avanjem table 2 × n, kada poplo£avanje vr²imo sa L tromino poliomino oblikom. Dobijeni rezultat dajemo u sljede¢oj teoremi. Teorema 3.3.3 f vektor simplicijalnog kompleksa KL3(D2×n) dat je rekur- zivnom relacijom f0 = 4(n − 1) f1 = 8n2 − 38n + 44 fk = fk(KL3(D2×(n−1))) + 4fk−1(KL3(D2×(n−2))) + 2fk−2(KL3(D2×(n−3))). Dokaz: Neka je data kvadratna tabla 2 × n. L tromino na datu tablu mo°emo postaviti na (n − 1) razli£it na£in. Budu¢i da L tromino mo°emo postaviti obzirom na £etiri razli£ite orijentacije slijedi da je f0 = 4(n − 1). 78 Slika 3.8: L tromino u orijentaciji 1 Slika 3.9: L tromino u orijentaciji 2 Slika 3.10: L tromino u orijentaciji Slika 3.11: L tromino u orijentaciji 3 4 Odredimo sada f1, tj. razmotrimo broj razli£itih mogu¢nosti postavljanja dva L tromina na datu tablu. U prvom slu£aju razmotrimo postavljanje dva L tromina postavljena u istoj orijentaciji. Neka je ksirano prvo postavljanje L tromina u orijentaciji 1 kao ²to je prikazano na Slici 3.8. Tada novi L tromino na datu tablu u istoj orijentaciji mo°emo postaviti na n − 3 razli£ita na£ina. Fiksiramo li postavljanje L tromina u drugi stupac tada novi L tromino mo°emo postaviti na n − 4 razli£ita na£ina. Pomjeranjem i ksiranjem L tromina u naredni stupac broj razli£itih kombinacija u svakom takvom koraku se smanjuje za 1. Stoga mo°emo zaklju£iti da je ukupan broj postavljanja L tromina u orijentaciji 1, jednak sumi prvih n − 3 prirodnih brojeva, tj. (n−3)(n−2). U svakoj od prikazanih orijentacija vrijedi ista zakonitost zaklju£ivanja. Stoga mo°emo zaklju£iti da je broj kombinacija 2 postavljanja L tromina u istoj orijentaciji 4· 2 = 2(n − 3)(n − 2). (n − 3)(n − 2) Nadalje razmotrimo postavljanje L tromina u kombinaciji datih orijentacija. Prvo razmotrimo postavljanje dva L tromina u kombinaciji prve i druge orijentacije, kao ²to je prikazano na Slici 3.8 i Slici 3.9. Tada sa prvim i zadnjim postavljenim L trominom mo°emo postaviti 2(n − 3) L tromina. Kod preostalih (n − 3) razli£itih oblika L tromina mo°emo postaviti (n − 4) razli£ita L tromina. Odnosno, ukupno u kombinaciji prve i druge orijentacije mo°emo postaviti 2(n − 3) + (n − 3)(n − 4) razli£itih kombinacija L tromina. Analognim razmatranjem slijedi da u kombinaciji prve i tre¢e, te druge i £etvrte kombinacije mo°emo postaviti po (n − 2)

+ (n − 2)(n − 3) 79 razli£itih kombinacija dva L tromina. U prvoj i £etvrtoj, drugoj i tre¢oj, te u tre¢oj i £etvrtoj kombinaciji moºemo postaviti po 2(n − 3) + (n − 3)(n − 4) razli£itih kombinacija L tromina. Sabiranjem svih mogu¢ih kombinacija slijedi da je f1(KL3(D2×n)) = 8n2 − 38n + 44. Dokaºimo sada op¢enito tvrdnju za fk(KL3(D2×n)). Pretpostavimo da su dva uspravna polja date table ostala neprekrivena. Tada nam je ostao dio table dimenzije 2 × (n − 1) neprekriven. Preostali dio ¢emo prekrivati sa k L tromino oblika. Broj takvih prekrivanja je odrežen sa fk(KL3(D2×(n−1))). U sljede¢em slu£aju razmotrimo tablu 2×n tako da su prva dva uspravna polja na tabli prekrivena. Tada je jedno od polja do prekrivenog uspravnog stupca također prekriveno (Slika 3.8 i Slika 3.11), a jedno prazno. Tada nam ostaje tabla dimenzije 2 × (n − 2) prazna i prazni dio table popunjavamo sa k − 1 L tromino oblika, a broj takvih prekrivanja jednak je 2fk−1(KL3(D2×(n−2))) (simetrija). Razmotrimo sada slu£aj kad su popunjena prva dva stupca date table 2 × n. Tada nam neprekriveno ostaje 2 × (n − 3) table, a broj takvih prekrivanja odrežen je sa 2fk−2(KL3(D2×(n−3))) (simetrija). Preostaje nam jo² razmotriti slu£aj kada je jedno polje u prvom stupcu date table 2 × n prazno (Slika 3.9 i Slika 3.10). Tada nam preostaje da prekrijemo 2 × (n − 2) polja date table, broj takvih prekrivanja jednak je 2fk−1(KL3(D2×(n−2))) (simetrija). Sabiraju¢i sve navedene slu£ajeve dobijamo traºenu rekurziju fk = fk(KL3(D2×(n−1))) + 4fk−1(KL3(D2×(n−2))) + 2fk−2(KL3(D2×(n−3))). U sljede¢oj tabeli dajemo pregled f vektora simplicijalnog kompleksa za neke konkretne n. Tabela 3.3: Pregled f vektora simplicijanlog kompleksa KL3(D2×n) za neke konkretne vrijednosti n n f0 f1 f2 f3 f4 f5 f6 f7 3 8 2 4 12 20 5 16 54 16 6 20 104 112 4 7 24 170 352 108 8 28 252 800 664 48 9 32 350 1520 2280 704 8 10 36 464 2576 5820 4064 416 11 40 594 4032 12404 14784 4560 128 12 44 740 5952 23408 41104 25376 3200 16 80 3.3.1 Operacija join simplicijalnih kompleksa poplo£a- vanja De nicija 3.3.4 Neka su K i L simplicijalni kompleksi na skupu vrhova S i S', gdje su S i S'mežusobno disjunktni. Simplicijalni kompleks K ∗ L = {A ⊔ B : A ∈ K, B ∈ L} nazivamo spajanje (engl. join) kompleksa K i L. f polinom od (n − 1) dimenzionalnog simplicijalnog kompleksa K je f (t) = tn + f0tn−1 + · · · + fn−1. (3.5) Propozicija 3.3.3

Neka su K i L simplicijalni kompleksi . Tada vrijedi **f (K ∗ L**	1

) = f (K) ∗ f (L). (3.6) Dokaz: Neka su dati simplicijalni kompleksi K i L, te neka je dim K = n1−1, a dim L = n2 − 1. Na osnovu (3.5) slijedi da je fK(t) = tn1 + f0tn1−1 + · · · + fn1−1, fL(t) = tn2 + f0'tn2−1 + · · · + fn'2−1. Tada vrijedi da je fK(t) ∗ fL(t) = (tn1 + f0tn1−1 + · · · + fn1−1) · (tn2 + f0'tn2−1 + · · · + fn'2−1) = tn1+n2 + (f0 + f0')tn1+n2−1 + · · · + fn1−1fn'2−1 n1+n2 = ar tr , ∑r=0 gdje je ar = fifj' . i+j=n1+n2−r−2 −−11≤≤∑ji≤≤nn12−−11 U zavisnosti od slu£ajevea, pobliºe za koe cijente vrijedi: i) Za n1 > n2 i r ≥ n1 vrijedi n1+n2−r−1 ar = fifn'1+n2−r−2−i. i∑=−1 81 ii) Za n1 > n2 i r < n1 vrijedi n1−1 ar = i=n∑1−r−1 fifn'1+n2−r−2−i. iii) Za n1 = n2 i r ≥ n1 vrijedi 2n1−r−1 ar = fif2'n1−r−2−i. i∑=−1 iv) Za n1 = n2 i r < n1 vrijedi n1−1 ar = fif2'n1−r−2−i. i=n∑1−r−1 v) Za n2 > n1 i r ≥ n2 vrijedi n1+n2−r−1 ar = vi) Za n2 > n1 i r < n2 vrijedi i∑=−1 fif2'n1−r−2−i. ar = n2−r−1 i=n∑2−r−1 fif2'n1−r−2−i. Nadalje, slijedi da je fK(t) ∗ fL(t) = f(K ∗ L). Primijetimo da u prou£avanju simplicijalnih kompleksa asociranih posta- vljanjem I tromina na kvadratnu tablu dimenzije 2 × n zapravo razmatramo join operaciju simplicijalnog kompleksa poplo£avanja, jer ne postoje verti- kalne mogu¢nosti postavljanja I-tromina na datu tablu. Teorema 3.3.4 f vektor simplicijalnog kompleksa KI3(D2×n) dat je sa k fk(KI3(D2×n)) = n − 2j − 2 n − 2k + 2j − 4 ∑j=0(j +1)(k −j +2 .) 82 Dokaz: Neka je data kvadratna tabla D2×n. Razmotrimo simplicijalan kompleks koji je asociran postavljanjem I-tromina na datu tablu. Uo£imo da je fKI3(D2×n)(t) join od fKI3(D1×n)(t) sa samim sobom, tj. fKI3(D2×n)(t) = fKI3(D1×n)(t) ∗ fKI3(D1×n)(t). Primjenom Teoreme 3.3.1 za n1 = n2 i Propozicije 3.3.3 direktno slijedi dato tvrženje. Primijetimo da ista opservacija vrijedi i za simplicijalni kompleks koji je asociran postavljanjem I tromina na kvadratnoj torusnoj mreºi. Teorema 3.3.5 f vektor simplicijalnog kompleksa Kl3(T2×n) dat je sa k fk(Kl3(T2×n)) = 4 n − j − 2 n − k + j − 3 ∑j=0 (j)(k −

j + 1) k + 2 n− j −2 n− k+j −3 ∑j= 0(j	22

k−j +2)( ) k + 2 n−j −2 n−k+j +3 ∑j=0(

j +1 k−j +1)( ) k + n− j −2 n− k+j +3 ∑j= 0 (j + 1)(k− j	22

+2 .) Dokaz: Neka je data kvadratna torusna mreºa dimenzije 2 × n. Na datoj kvadratnoj torusnoj mreºi razmotrimo simplicijalan kompleks asociran postavljanjem I tromino oblika. Tada vrijedi da je fKl3(T2×n)(t) join od fKl3(T1×n)(t) sa samim sobom, tj. fKl3(T2×n)(t) = fKl3(T1×n)(t) ∗ fKl3(T1×n)(t). Nadalje, primjenom Teoreme 3.3.2 za n1 = n2 i Propozicije 3.3.3 slijedi dato tvrženje. 3.4 Alexanderova dualnost simplicijalnih kom- pleksa poplo£avanja U ovom odjeljku ¢emo uvesti pojam Alexanderovog duala simplicijalnog kompleksa. Alexanderov dual se moºe intuitivno shvatiti kao kompleks, u skupu svih vrhova, ne lica kompleksa u samom sebi. Neka je dat simplicijalni kompleks K ⊂ P([n]). Dati simplicijalni kompleks K dijeli partitivni skup (u oznaci P([n])) skupa [n] na disjunktne podskupove K i [n] \ K. 83 De nicija 3.4.1 Neka je dat simplicijalni kompleks K na skupu vrhova [n]. Alexanderov dual ili dual od K , u oznaci K̂ , dat je sa K̂ = {[n] \ A : [n] ⊃ A ∉ K }, gdje A = {v0, v1, . . . , vn} predstavlja simplicijalni kompleks u kojem postoji jedinstven poredak tako da vrijedi v0 < v1 < · · · < vn. K̂ takožer predstavlja simplicijalni kompleks koji zadovoljava sljede¢a svoj- stva: Lema 3.4.1 Neka je K ⊆ P ([n]) simplicijalni kompleks tada je i K̂ ⊆ P ([n]) simplicijalni kompleks. Dokaz Leme 3.4.1 moºe se prona¢i u [42]. Lema 3.4.2 Neka je K ⊆ P([n]) simplicijalni kompleks, tada vrijedi K̂ = D[n] \ {[n] \ A : A ∈ K}, gdje D[n] za kona£an skup [n], predstavlja skup svih podskupova skupa [n] prikazan kao simplicijalni kompleks. Dokaz Leme 3.4.1 moºe se prona¢i u [42]. Lema 3.4.3 Neka su K,L ⊆ P([n]) simplicijalni kompleksi. Tada vrijedi: i) Ako je K ⊆ L tada je K̂ ⊆ L̂. ii) (K̂) = K. Lema 3.4.4 Kompleksi K ⊆ P ([n]) i L ⊆ P ([m]) su izomorfni ako su njihovi Alexanderovi duali K̂ ⊆ P ([n]) i L̂ ⊆ P ([m]) izomorfni. Dokaz Leme 3.4.4 moºe se prona¢i u [42]. Alexanderov dual daje poveznicu izmežu homologije i kohomologije, a ista je iskazana u sljede¢oj tvrdnji: Teorema 3.4.1 (Alexanderov dual) Za simplicijalni kompleks K ⊆ P ([n]), sa |[n]| − 1 = N zadovoljeno je sljede¢e svojstvo H˜i(K) ∼= H˜j(K[n]), kad god je i + j = N − 2. 84 Dokaz Teoreme 3.4.1 moºe se prona¢i u [42]. Ponekad je kombinatorna reprezentacija Alexanderovog duala jednostavnija od kombinatorne reprezentacije simplicijalnog kompleksa K. Ovu £injenicu iskoristili smo za prou£avanje sloºenijih i kompleksnijih primjera. Primjer 8 f vektor simplicijalnog kompleksa Kl2(D3×3) dat je sa f (Kl2 (D3×3)) = (12, 44, 56, 18). Rje²enje: Razmotrimo sva mogu¢a postavljanja domine na tablu dimenzije 3 × 3. Tada imamo sljede¢e mogu¢nosti: Slika 3.12: Mogu¢a postavljanja domine na tablu 3 × 3 Odredimo sada sve mogu¢e maksimalne ne simplicijalne komplekse na datoj tabli: {1,4}, {1,7}, {1,9}, {2,5}, {2,7}, {2,8}, {2,9}, {2,10}, {3,6}, {3,8}, {3,10}, {4,9}, {4,11}, {5,9}, {5,10}, {5,11}, {5,12}, {6,10}, {6,12}, {7,8}, {9,10}, {11,12}. U programski paket Sage 9.0 unesimo kod kroz skup svih vrhova, elimini²u¢i maksimalne nesimplicijalne komplekse, kako slijedi: K=SimplicialComplex([[2,3,5,6,7,8,9,10,11,12],[2,3,4,5,6,8,9,10, 11,12],[2,3,4,5,6,7,8,10,11,12],[1,3,4,6,7,8,9,10,11,12],[1,3,4, 5,6,8,9,10,11,12],[1,3,4,5,6,7,9,10,11,12],[1,3,4,5,6,7,8,10,11, 12],[1,3,4,5,6,7,8,9,11,12],[1,2,4,5,7,8,9,10,11,12],[1,2,4,5,6, 7,9,10,11,12],[1,2,4,5,6,7,8,9,11,12],[1,2,3,5,6,7,8,10,11,12],[1, 2,3,5,6,7,8,9,10,12],[1,2,3,4,6,7,8,10,11,12],[1,2,3,4,6,7,8,9,11, 12],[1,2,3,4,6,7,8,9,10,12],[1,2,3,4,6,7,8,9,10,11],[1,2,3,4,5,7, 8,9,11,12],[1,2,3,4,5,7,8,9,10,11],[1,2,3,4,5,6,9,10,11,12],[1,2, 3,4,5,6,7,8,11,12],[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10]]) Nadalje, u Sageu 9.0 odredimo Alexanderov dual datog simplicijal- nog kompleksa K. Alexanderov dual odrežujemo na osnovu naredbe Y=K.alexander_dual(), a pomo¢u naredbe Y.f_vector() dobijamo tra°eni 85 f vektor simplicijalnog kompleksa Y , odnosno simplicijalnog kompleksa KI2(D3×3), dat sa f (KI2 (D3×3)) = (12, 44, 56, 18). ? Primjer 9 f vektor simplicijalnog kompleksa KI2(T3×3) dat je sa f (KI2 (T3×3)) = (18, 99, 180, 72). Rje²enje: Neka je data kvadratna torusna mre°a dimenzije 3 × 3. Na datoj mre°i razmotrimo sva mogu¢a postavljanja domine (Slika 3.4). Slika 3.13: Mogu¢a postavljanja domine na torusnu kvadratnu mre°u 3 × 3 Razmatranjem mogu¢ih postavljanja domine na datu torusnu mre°u odredimo sve maksimalne nesimplekse, tj. sve mogu¢e presjeke postavljanja domine na datoj kvadratnoj torusnoj mre°i. Maksimalni nesimpleksi su: {1,2}, {1,7}, {1,9}, {1,13}, {1,16}, {1,17}, {2,9}, {2,11}, {2,13}, {2,17}, {2,18}, {3,4}, {3,7}, {3,8}, {3,9}, {3,10}, {3,14}, {4,9}, {4,10}, {4,11}, {4,12}, {4,14}, {5,6}, {5,8}, {5,10}, {5,15}, {5,16}, {5,17}, {6,10}, {6,12}, {6,15}, {6,17}, {6,18}, {7,8}, {7,13}, {7,14}, {7,16}, {8,14}, {8,15}, {8,16}, {9,10}, {9,17}, {10,17}, {11,12}, {11,13}, {11,14}, {11,18}, {12,14}, {12,15}, {12,18}, {13,16}, {13,18}, {15,16}, {15,18}. U Sageu 9.0 de ni²imo gore opisani simplicijalni kompleks: K=SimplicialComplex([[3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18], [2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18], [2,3,4,5,6,7,8,10,11, 12,13,14,15,16,17,18],[2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,15,16,17,18], [2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18], [2,3,4,5,6,7,8,9,10,11, 86 12,13,14,15,16,18],[1,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,16,17,18],[1, 3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,14,15,16,17,18],[1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12, 14,15,16,17,18],[1,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18], [1,3,4, 5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17],[1,2,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14, 15,16,17,18],[1,2,4,5,6,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18], [1,2,4,5, 6,7,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18],[1,2,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14, 15,16,17,18],[1,2,4,5,6,7,8,9,11,12,13,14,15,16,17,18], [1,2,4,5,6, 7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18],[1,2,3,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15,16, 17,18],[1,2,3,5,6,7,8,9,11,12,13,14,15,16,17,18], [1,2,3,5,6,7,8,9, 10,12,13,14,15,16,17,18],[1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,13,14,15,16,17,18], [1,2,3,5,6,7,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18], [1,2,3,4,7,8,9,10,11,12, 13,14,15,16,17,18],[1,2,3,4,6,7,9,10,11,12,13,14,15,16,17,18],[1,2, 3,4,6,7,8,9,11,12,13,14,15,16,17,18], [1,2,3,4,6,7,8,9,10,11,12,13, 14,16,17,18],[1,2,3,4,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,17,18],[1,2,3,4,6, 7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18], [1,2,3,4,5,7,8,9,11,12,13,14,15,16, 17,18],[1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,13,14,15,16,17,18],[1,2,3,4,5,7,8,9, 10,11,12,13,14,16,17,18], [1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,18], [1,2,3,4,5,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16,17],[1,2,3,4,5,6,9,10,11,12, 13,14,15,16,17,18], [1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,14,15,16,17,18],[1,2, 3,4,5,6,8,9,10,11,12,13,15,16,17,18],[1,2,3,4,5,6,8,9,10,11,12,13, 14,15,17,18], [1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,15,16,17,18],[1,2,3,4,5, 6,7,9,10,11,12,13, 14,16,17,18],[1,2,3,4,5,6,7,9,10,11,12,13,14,15, 17,18], [1,2,3,4,5,6,7,8,11,12,13,14,15,16,17,18],[1,2,3,4,5,6,7,8, 10,11,12,13,14,15,16,18],[1,2,3,4,5,6,7,8,9,11,12,13,14,15,16,18], [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,13,14,15,16,17,18],[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12, 14,15,16,17,18],[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,12,13,15,16,17,18], [1,2,3,4, 5,6,7,8,9,10,12,13,14,15,16,17],[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,15,16, 17,18],[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,13,14,16,17,18], [1,2,3,4,5,6,7,8,9, 10,11,13,14,15,16,17],[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,15,17,18],[1, 2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,14,15,16,17], [1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12, 13,14,17,18],[1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,16,17]]) Nadalje odredimo Alexanderov dual simplicijalnog kompleksa K, nared- bom Y=K.alexander_dual() i f vektor sa Y.f_vector(). Dobijeni f vektor predstavlja vektor tra°enog simplicijalnog kompleksa f (KI2 (T3×3)) = (18, 99, 180, 72). ? 87 3.5 Pure svojstvo simplicijalnih kompleksa po- plo£avanja U ovom odjeljku de nisat ¢emo svojstvo pure simplicijalnog kompleksa poplo£avanja i dati pregled uo£enih i dokazanih tvrdnji simplicijalnih kom- pleksa poplo£avanja u odnosu na svojstvo pure. Mi smo se opredijelili za upotrebu termina pure. De nicija 3.5.1 Simplicijalni kompleks K je £ist (engl. pure) ako su sva maksimalna lica (faceti) u njemu iste dimenzije. Primjer 10 Simplicijalan kompleks poplo£avanja KI2(D1,n) za n = 5 je pure kompleks. Rje²enje: Neka je dat simplicijalni kompleks poplo£avanja KI2(D1,5). U KI2(D1,5) su svi maksimalni simpleksi dimenzije 1. ? Propozicija 3.5.1 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja KI2(D1,n), n ≥ 6 nisu pure kompleksi. Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks poplo£avanja KI2(D1,n), n ≥ 6. Razmotrimo maksimalne simplekse datog kompleksa prikazane na Slici 3.14 i Slici 3.15. Slika 3.14: Maksimalan simpleks simplicijalnog kompleksa poplo£avanja Kl2(D1,n) dimenzije n − 1 za n = 2k + 1, k ≥ 3 i dimenzije n2 za n = 2k, k ≥ 3 Slika 3.15: Maksimalan simpleks simplicijalnog kompleksa poplo£avanja Kl2(D1,n) dimenzije n − 5 Sa prikazanih slika je o£igledno da dati maksimalni simpleksi nemaju istu dimenziju, stoga zaklju£ujemo da Kl2(D1,n), n ≥ 6 nisu pure kompleksi. 88 Primjer 11 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja Kl3(D1,n) za n = 5 i n = 8 su pure kompleks. Rje²enje: Simplicijalni kompleks poplo£avanja Kl3(D1,5) ima sve maksi- malne simplekse dimenzije 0, a simplicijalni kompleks poplo£avanja Kl3(D1,8) ima sve maksimalne simplekse dimenzije 1. Stoga zaklju£ujemo da dati kompleksi posjeduje svojstvo pure. ? Propozicija 3.5.2 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja Kl3(D1,n), n ≥ 9 nisu pure kompleksi. Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks poplo£avanja Kl3(D1,n), n ≥ 9. Razmotrimo sljede¢e maksimalne simplekse datog simplicijalnog kompleksa poplo£avanja. U slu£aju kada je n = 3k, k ≥ 3 tada I tromino mo°emo postaviti tako da je svako polje date table potpuno prekriveno. Kada je n = 3k + 1, k ≥ 3 ostat ¢e nam jedno polje date table nepokriveno, a u slu£aju kada je n = 3k + 2, k ≥ 3 ostaju nam dva polja neprekrivena. Svaki od navedenih slu£ajeva predstavlja maksimalni simpleks datog simplicijalnog kompleksa poplo£avanja dimenzije k − 1. Slika 3.16: Maksimalan simpleks simplicijalnog kompleksa poplo£avanja Kl3 (D1,n) Slika 3.17: Maksimalan simpleks simplicijalnog kompleksa poplo£avanja Kl3 (D1,n) Kako dati maksimalni simpleksi nemaju iste dimenzije to zaklju£ujemo da isti nisu pure kompleksi. Primjer 12 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja Kl2(T1,n) za n = 4, n = 5 i n = 7 su pure kompleksi. Rje²enje: Dati simplicijalni kompleksi poplo£avanja Kl2(T1,4), Kl2(T1,5) imaju sve maksimalne simplekse dimenzije 1, a Kl2(T1,7) dimenzije 2, pa za date komplekse ka°emo da su pure kompleski. ? Primjer 13 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja Kl2(T1,n) za n = 6 nije pure kompleks. 89 Rje²enje: Neka je dat simplicijalni kompleks poplo£avanja Kl2(T1,6). Uo- £imo maksimalne simplekse prikazane na Slici 3.18 i Slici 3.19 koji su dimenzije 2 i 1 respektivno. Slika 3.18: Maksimalan simpleks simplicijalnog kompleksa poplo£avanja Kl2(T1,6) dimenzije 2 Slika 3.19: Maksimalan simpleks simplicijalnog kompleksa poplo£avanja Kl2(T1,6) dimenzije 1 ? Propozicija 3.5.3 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja Kl2(T1,n), n ≥ 8 nisu pure kompleksi. Dokaz: Dokaz je analogan dokazu Teoreme 3.5.1. Propozicija 3.5.4 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja Kl3(T1,n), n ≥ 9 nisu pure kompleksi. Dokaz: Dokaz je analogan dokazu Teoreme 3.5.2. Primjer 14 Simplicijalni kompleks poplo£avanja Kl2(T2,2) je pure kompleks. Rje²enje: U datom simplicijalnom kompleksu svi maksimalni simpleski su dimenzije 1. ? Posljedica 3.5.1 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja Kl3(D2,n), n ≥ 6 nisu pure kompleksi. Simplicijalni kompleks poplo£avanja Kl3(D2,n), n ≥ 6 su join kompleksi sa samim sobom, za koje smo u Propoziji 3.5.2 pokazali da nisu pure kompleksi. Posljedica 3.5.2 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja Kl3(T2,n), n ≥ 6 nisu pure kompleksi. Simplicijalni kompleks poplo£avanja Kl3(T2,n), n ≥ 6 su join kompleksi sa samim sobom, za koje smo prethodno pokazali da nisu pure kompleksi. 90 Propozicija 3.5.5 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja Kl2(Dm,n), m ≥ 2, n ≥ 3 nisu pure kompleksi. Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks poplo£avanja Kl2(Dm,n), gdje su m ≥ 2, n ≥ 3. Razmotrimo prvo slu£aj kada su m i n oba neparna. Uo£imo da tada maksimalne simplekse datog simplicijalnog kompleksa mo°emo prikazati kao na Slici 3.20 i Slici 3.21. Kako dati maksimalni simpleksi nisu iste dimenzije zaklju£ujemo da Kl2(Dm,n) za neparne m i n nisu pure kompleksi. Slika 3.20: Maksimalni simpleks od Slika 3.21: Maksimalni simpleks od Kl2(Dm,n) kada su m i n oba neparna Kl2(Dm,n) kada su m i n oba neparna Neka su sada m i n razli£ite parnosti, bez smanjenja op¢enitosti neka je m neparan. Uo£imo da tada maksimalne simplekse mo°emo prikazati kao na Slikama 3.22, 3.23 i 3.21. Kako prikazani simpleksi nemaju iste dimenzije zaklju£ujemo da ni u ovom slu£aju Kl2(Dm,n) nisu pure kompleksi. 91 Slika 3.22: Maksimalni simpleks od Slika 3.23: Maksimalni simpleks od Kl2 (Dm,n) kada su m i n razli£ite Kl2 (Dm,n) kada su m i n razli£ite parnosti parnosti U slu£aju kada su m i n oba parna lako je uo£iti da mo°emo jedan maksimalan simpleks dobiti postavljaju¢i domine uspravno, a drugi na na£in koji je prikazan na Slici 3.23. Stoga zaklju£ujemo da Kl2(Dm,n) za m ≥ 2, n ≥ 3 nisu pure kompleksi. Propozicija 3.5.6 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja Kl2(Tm,n), m ≥ 2, n ≥ 3 nisu pure kompleksi. Dokaz: Dokaz date tvrdnje je analogan dokazu Teoreme 3.5.5. Uo£imo da ¢e maksimalni simpleksi prikazani na Slikama 3.20 i 3.22 biti maksimalni simpleksi i na torusnoj kvadratnoj mre°i, a da simpleksima prikazanim na Slikama 3.21 i 3.23 moramo dodati dominu na horizontalnoj stranici lijepljenja u praznim poljima prvog, odnosno zadnjeg reda da bi bili maksimalni simpleksi na torusnoj kvadratnoj mre°i. Mežutim, tako dobijeni maksimalni simpleksi nemaju iste dimenzije to slijedi da Kl2(Tm,n), m,n ≥ 3 nisu pure kompleksi. Propozicija 3.5.7 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja Kl3(Dm,n), m, n ≥ 4 nisu pure kompleksi. Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks poplo£avanja Kl3(Dm,n), m, n ≥ 4. Uo£imo da tada maksimalne simplekse kompleksa Kl3(Dm,n), m, n ≥ 4 mo°emo uo£iti u jednom od sljede¢ih oblika. Ako je m = 3k i n ≥ 4. Tada mo°emo uo£iti maksimalne simplekse simplicijalnog kompleksa poplo£avanja Kl3(Dm,n) u oblicima prikazanim

na Slici 3.24 i Slici 3.25 . 92 Slika 3.24 43

: Maksimalni simpleks od Slika 3.25: Maksimalni simpleks od Kl3(Dm,n) za m = 3k, k ≥ 1, n ≥ 4 Kl3(Dm,n) O£igledno je da dati maksimalni simpleksi nemaju istu dimenziju pa stoga nisu ni pure kompleksi. Dokaz analogno provodimo i u slu£ajevima kada je m = 3k + 1 i m = 3k + 2, k ≥ 1, n ≥ 4. Propozicija 3.5.8 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja Kl3(Tm,n) za m, n ≥ 4 nisu pure kompleksi. Dokaz: Dokaz je analogan dokazu Teoreme 3.5.7. 3.6 Balansirani simplicijalni kompleksi poplo- £avanja U ovom odjeljku razmotrit ¢emo balansirane simplicijalne komplekse poliomino poplo£avanja. De nicija 3.6.1 Neka je K simplicijalan kompleks na skupu vrhova V . Ka°emo da je K balansiran ili uravnote°en (engl. balanced) ako postoji preslikavanje k : V↦ → [d] takvo da je {x, y} stranica u K i vrijedi da je k(x) ≠ k(y). Prethodnu de niciju mo°emo zami²ljati i u smislu bojenja. Ako pretpo- stavimo da je K bojenje od skupa vrhova V sa bojama {1, 2, . . . , d} tada svako lice od K ima sve vrhove obojene razli£itim bojama. Uvijek mo°emo pretpostaviti da je K dio strukture uravnote°enog kompleksa £ak ako i nije eksplicitno nagla²eno. Drugim rije£ima ka°emo da je simplicijalni kompleks 93 dimenzije d balansiran ako je (d + 1) obojiv. Za vi²e o balansiranim simplicijalnim kompleksima pogledati [11], [37], [38], [39], [40], [46], [78], [81] i [82]. Prije nego ²to formuli²emo glavna tvrženja ovog paragrafa odredit ¢emo dim Klp(Dm,n). Iz rada sa homolo²kim grupama poplo£avanja znamo da su poplo£avanja sa l p-ominima senzitivna na dijagonalna bojenja u p boja, pa ¢emo tablu ozna£iti brojevima 1, 2, . . . , p kao na Slici 3.26. Kako god da postavimo oblik on pokriva p razli£itih brojeva, te svakako ne mo°emo postaviti vi²e od di oblika gdje je di broj polja ozna£enih sa i na Slici 3.26. Slika 3.26: Bojanje vrhova simplicijalnih kompleksa poplo£avanja Klp(Dm,n) Lema 3.6.1 dim Klp(Dm,n) = da+1 za m, n ≥ p. Dokaz: Ukoliko p | m ili p | n o£igledno je da odgovaraju¢e horizontalno odnosno vertikalno redanje proizvodi potpuno prekrivanje table sa mpn oblika. U ovim specijalnim slu£ajevima broj za svako polje se na tabli pojavljuje isti broj puta, pa tvrženje va°i. No, stvari nisu o£igledne u ostalim slu£ajevima i potrebno ih je detaljnije analizirati. Neka je m = m1p + a i n = n1p + b. Razlikovat ¢emo dva slu£aja

a + b ≤ p − 1 i a + b ≥ p . Ako je a + b ≤ p 1

− 1, mo°emo zaklju£iti da je da+1 = m1n1p + an1 + bm1, a na Slici 3.27 je dato jedno postavljanje m1n1p + an1 + bm1 l p-omina bez preklapanja na tablu u ovom slu£aju. 94 Slika 3.27: Bojanje vrhova simplicijalnih kompleksa poplo£avanja Klp(Dm,n) Razmotrimo sada slu£aj a + b ≥ p. Primijetimo da je svakako a + b ≤ 2p − 2. 95 Slika 3.28: Bojanje vrhova simplicijalnih kompleksa poplo£avanja Klp(Dm,n) U ovom slu£aju Slika 3.28 nam mo°e pomo¢i da sra£unamo da je da+1 = m1n1p + an1 + bm1 + a + b − p, kao i da imamo prekrivanje takvo da su prekrivena sva polja ozna£ena sa a + 1, £ime je dokaz zavr²en. Teorema 3.6.1 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja Klp(Dm,n), m, n ≥ p su balansirani kompleksi. Dokaz: Posmatrajmo polja ozna£ena sa a + 1 u Slici 3.26 i ozna£imo ih redom sa x1, x2, . . . , xda+1 kao na Slici 3.29. Pravilno bojenje simplicijalnog 96 kompleksa dobijamo tako ²to vrh od Klp(Dm,n) bojimo bojom i ako njemu odgovaraju¢e postavljanje plo£ice prekriva polje xi. Sada zbog Leme 3.29 slijedi i da je kompleks Klp(Dm,n) balansiran. Slika 3.29: Bojanje vrhova simplicijalnih kompleksa poplo£avanja Klp(Dm,n) Razmotrimo sada svojstvo balansiranosti na simplicijalnom kompleksu koji je asociran postavljanjem I omina na kvadratnu torusnu mre°u Klp(Tm,n). Teorema 3.6.2 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja Klp(Tm,n) za m ∈ N i n = p · l, l ≥ 2 su balansirani kompleksi, a u svim drugim slu£ajevima nisu balansirani kompleksi. Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks poplo£avanja asociran postavlja- njem I p-omina na kvadratnu torusnu mre°u dimenzije m × n. Jasno je da je dimKlp(Tm,n) ≤ ⌊mpn⌉−1. Primijetimo da se na svako polje table na torusu mo°e postaviti p uspravnih i p vodoravnih I p-omina, pa ovaj simplicijalni kompleks ima 2mn vrhova. Analizirajmo ovo bojenje. Dva vrha mogu biti obojena istom bojom ako se odgovaraju¢i vrhovi preklapaju. Stavi²e i za tri vrha obojena istom bojom va°i opservacija sva tri odgovaraju¢a postavljanja moraju imati zajedni£ki vrh koji preklapaju, jer bar dva polo°aja moraju biti u istoj koloni ili vrsti. Ovo povla£i zapravo da sva polja obojena istom bojom moraju prekrivati zajedni£ko polje iz Helijeve teoreme. Dakle, jednom bojom je obojeno najvi²e 2p vrhova od Klp(Tm,n). Na datoj torusnoj mre°i imamo m · n polja. Razmotrimo dati kompleks u sljede¢im slu£ajevima: 1) Neka p|m i p|n. Ako vrijedi da su m i n djeljivi sa p mo°emo upotrjebiti bojenje kori²¢eno u dokazu Teoreme 3.6.1 i uvjereti da je kompleks balansiran. 97 2) Bez smanjenja op¢enitosti neka p ∤ m i p|n. O£igledno tada p|m · n. Tada je iskori²¢eno mp·n boja pa je svakom bojom obojano 2p vrhova. Za svaku od mp·n boja postoji zajedni£ko polje za svako postavljanje Ip omino oblika i uzmimo da su ta polja ozna£ena na torusnoj tabli. ’tavi²e, bojenje je i zadato tako da su vrhovi koji odgovaraju plo£icama koje prekrivaju isto ozna£eni i jednobojni. Kako svaka plo£ica pokriva jedno polje, u jednoj vrsti mo°emo imati najvi²e ⌊mp⌉ obojenih polja da neka plo£ica ne bi prekrila dva ozna£ena polja. To povla£i da je ukupan broj ozna£enih polja n·⌊mp⌉ < n· mp = mpn, ²to je kontradikcija. 3) Neka p ∤ m i p ∤ n. Na kvadratnu torusnu mre°u tada mo°emo staviti najvi²e mpn − 1 Ip omino oblika, odakle slijedi da je ⌊ ⌋ mn p − 1 ≥ dim(Klp(Tm×n)). ⌊ ⌋ Ukoliko bi dozvolili da koristimo mpn , imali bi najvi²e 2p · mpn < 2p · mpn = 2mn vrhova, ²to je kontr⌊adik⌋cija. ⌊ ⌋ Na osnovu razmotrenih slu£ajeva slijedi dato tvrženje. 3.7 Homologija simplicijalnih kompleksa asoci- ranih poplo£avanjem De nicija 3.7.1 Niz abelovskih grupa i homomor zama C . . . →

Cn+1 ∂−n−+→1 Cn −∂→n Cn−1 → . . . → C1 −∂→ **1 C0 −∂→0 0** takav da je ∂ **n ∂n**	20

+1 = 0 za svaki prirodan broj n naziva se lan£ani kompleks. Elemente podgrupe Ker ∂n ⊆ Cn nazivat ¢emo n ciklusi, a elemente podgrupe Im ∂n+1 ⊆ Cn n rubovi, a kako vrijedi da je ∂n ∂n+1 = 0 slijedi da je Im ∂n+1 ⊆ Ker ∂n. De nicija 3.7.2 Kvocijentna grupa Hn := Ker∂n/Im∂n+1 naziva se n ta homolo²ka grupa lan£anog kompleksa C. Elementi od Hn nazivaju se homolo²ke klase, oznaka [z], z ∈ Ker ∂, a za dva ciklusa x i y koji pripadaju istoj klasi ka°e se da su homologni, i pi²emo x ∼ y. 98 De nicija 3.7.3 Za simplicijalni kompleks K , homolo²ke grupe lan£anog kompleksa . . . →

Cn+1 ∂−n−+→1 Cn −∂→n Cn−1 → . . . → C1 −∂→ **1 C0 −∂→0 0**	20

nazivamo simplicijalnim homolo²kim grupama od simpleksa K, i ozna£avamo sa Hn(K) ili jednostavnije samo homolo²kim grupama od K. De nicija 3.7.4 Rang r(Hn(K)) naziva se n ti Bettijev broj kompleksa K. Homologija i Bettijevi brojevi simplicijalnih kompleksa su prou£avani u [10], [30], [40], [59], [60], [61] i [71]. Primjer 15 Homologija simplicijalnog kompleksa H(KI2(D3×3)) = {0 : 0, 1 : 0, 2 : Z5, 3 : 0}. Rje²enje: Razmotrimo sva mogu¢a postavljanja domine na torusnu kva- dratnu mre°u, odredimo maksimalne nesimplekse i de ni²imo simplicijalni kompleks K u Sageu 9.0 analogno kako je prikazano u Primjeru 8. Za de nisani simplicijalni kompleks poplo£avanja K odredit ¢emo Alexanderov dual, pomo¢u naredbe Y=K.alexander_dual(). Zatim koriste¢i naredbu Y.homology() odrežujemo tra°enu homologiju i dobijamo H(KI2(D3×3)) = {0 : 0, 1 : 0, 2 : Z5, 3 : 0}. Za odrežene simplicijalne komplekse poplo£avanja dajemo pregled njiho- ? vih homologija izra£unatih u programu Sage 9.0. Tabela 3.4: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa KI2(D1×n) za neke konkretne vrijednosti n n homologija 5 {0 : 0, 1 : 0} 6 7 {0 : 0, 1 : Z, 2 : 0} 8 {0 : 0, 1 : Z, 2 : 0} {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : 0} 9 10 {0 : 0, 1 : 0, 2 : Z, 3 : 0, 4 : 0} 11 {0 : 0, 1 : 0, 2 : Z, 3 : 0, 4 : 0} {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : 0, 4 : 0} 12 {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : Z, 4 : 0, 5 : 0} 99 Tabela 3.5: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa KI2(T1×n) za neke konkretne vrijednosti n n homologija 4 5 {

0 : Z , 1 : **0} 6** {0 : **0** , 1 : **Z** } 7 { **0** : 0, 1 : **Z × Z, 2** 44

: 0} 8 {0 : 0, 1 : Z, 2 : 0} 9 {0 : 0, 1 : 0, 2 : Z, 3 : 0} 10 {0 : 0, 1 : 0, 2 : Z × Z, 3 : 0} {0 : 0, 1 : 0, 2 : Z, 3 : 0, 4 : 0} 11 12 {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : Z, 4 : 0} {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : Z × Z, 4 : 0, 5 : 0} Tabela 3.6: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa KI3(D1×n) za neke konkretne vrijednosti n n homologija 5 6 {0 : Z × Z} 7 {0 : Z × Z, 1 : 0} 8 {0 : Z, 1 : 0} 9 {

0 : 0 , 1 : **0** , 2 : **Z** , 3 : **0** } 10 { **0 : 0** , 1 : **0** , 2 : **0** , 3 : **Z × Z** 38

× Z, 4 : 0} 11 {0 : 0, 1 : Z × Z × Z × Z, 2 : 0} 12 {0 : 0, 1 : Z × Z × Z, 2 : 0} {0 : 0, 1 : Z, 2 : Z, 3 : 0} Tabela 3.7: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa KI3(T1×n) za neke konkretne vrijednosti n n homologija 4 {0 : Z ×

5 Z × Z} 6 {0 : **Z × Z × Z × Z} 7** {0 : **Z** 19

, 1 : 0} 8 {0 : 0, 1 : Z} 9 {0 : 0, 1 : Z5} 10 {0 : 0, 1 : Z7, 2 : 0} {0 : 0, 1 : Z6, 2 : 0} 100 Tabela 3.8: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa KI2(D2×n) za neke konkretne vrijednosti n n homologija 2 3 {0 : Z, 1 : 0} 4 {0 : 0, 1 : Z × Z, 2 : 0} 5 {0 : 0, 1 : 0, 2 : Z, 3 : 0} 6 {0 : 0, 1 : 0, 2 : Z × Z, 3 : 0, 4 : 0} 7 {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : Z5, 4 : 0, 5 : 0} 8 {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : 0, 4 : Z × Z × Z × Z, 5 : 0, 6 : 0} {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : 0, 4 : Z × Z × Z × Z, 5 : Z, 6 : 0, 7 : 0} Tabela 3.9: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa KI2(L2×n) za neke konkretne vrijednosti n n homologija 3 {0 : 0, 1 : 0} 4 5 {0 : 0, 1 : Z × Z, 2 : 0} 6 {0 : 0, 1 : 0, 2 : Z × Z × Z, 3 : 0} 7 {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : Z, 4 : 0} 8 {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : Z × Z × Z × Z, 4 : 0, 5 : 0} 9 {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : 0, 4 : Z8, 5 : 0, 6 : 0} {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : 0, 4 : 0, 5 : Z5, 6 : 0, 7 : 0} Tabela 3.10: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa KI2(T2×n) za neke konkretne vrijednosti n n homologija 2 3 {0 : Z, 1 : Z × Z} 4 {0 : 0, 1 : Z9, 2 : Z} 5 {0 : 0, 1 : 0, 2 : Z16, 3 : Z} {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : Z21, 4 : Z} 101 Tabela 3.11: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa KI3(D2×n) za neke konkretne vrijednosti n n homologija 3 {0 : 0, 1 : 0} 4 5 {0 : 0, 1 : Z} 6 {0 : 0, 1 : Z × Z × Z × Z} 7 {0 : 0, 1 : Z × Z × Z × Z, 2 : 0, 3 : 0} 8 {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : Z, 4 : 0, 5 : 0} 9 {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : Z, 4 : 0, 5 : 0} {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : 0, 4 : 0, 5 : 0, 6 : 0, 7 : 0} Tabela 3.12: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa KI3(L2×n) za neke konkretne vrijednosti n n homologija 5 6 {

0 : 0 , 1 : Z × Z } 7 { 0 : 0, 1 : Z × Z × Z × Z , 2 : 0 46

} 8 {0 : 0, 1 : Z × Z, 2 : 0, 3 : 0} 9 {0 : 0, 1 : 0, 2 : Z, 3 : 0} {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : Z × Z × Z, 4 : 0} Tabela 3.13: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa KI3(T2×n) za neke konkretne vrijednosti n n homologija 4 5 {0 : 0, 1 : Z9} 6 {0 : 0, 1 : Z16} 7 {0 : 0, 1 : Z × Z × Z × Z, 2 : 0, 3 : 0} 8 {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : Z} 9 {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : Z25} {0 : 0, 1 : 0, 2 : 0, 3 : Z49, 4 : 0, 5 : 0} 102 Tabela 3.14: Pregled homologije simplicijalnog kompleksa KL3(D2×n) za neke konkretne vrijednosti n n homologija 3 4 {0 : Z5, 1 : 0} 5 {0 : 0, 1 : Z9} 6 {0 : 0, 1 : Z23, 2 : 0} {0 : 0, 1 : Z × Z × Z × Z, 2 : Z27, 3 : 0} 3.8 Cohen-Macaulay svojstvo simplicijalnih kompleksa poliomino poplo£avanja U ovom odjeljku bavit ¢emo se prou£avanjem Cohen Macaulay svojstva simplicijalnih kompleksa poliomino poplo£avanja. Ovo svojstvo simplici- jalnih kompleska je jedno od najvi²e prou£avanih svojstava simplicijalnih kompleksa. Jedan od najpoznatijih primjera Cohen Macaulay kompleksa je zasigurno primjer koji je dao Stanley 1975. godine u svom radu [76], a isti se uzima kao roženje Cohen Macaulay svojstva simplicijalnih kompleksa. De nicija koju je dao Stanley je algebarska, dok je Reisner u svom radu [70] koriste¢i se rezultatima Höchstera, vidjeti [32], pokazao da je svojstvo Cohen Macaulay £isto topolo²ko svojstvo. Za vi²e o prou£avanjima Cohen-Macualay svojstva pogledati [10], [13], [19], [40], [59], [70], [76], [77] i [79]. Sada ¢emo dati formalnu de niciju Cohen Macaulay svojstva simplicijalnih kompleksa. U tu svrhu prvo ¢emo uvesti (Krull) dimenziju i regularne nizove. De nicija 3.8.1 Neka je P prost ideal prstena S, P ? S, takav da kad god je ab ∈ P, tada a ∈ P ili b ∈ P. Lanac (engl. chain) prostog ideala je strogo rastu¢i niz prostih ideala P0 ? P1 ? P2 · · · ? Pn ⊂ S. Za n ka°emo da je du°ina lanca. De nicija 3.8.2 Krull dimenzija od R, ozna£ena sa dim R, je dim R = sup{n|P0 ? P1 ? P2 · · · ? Pn lanac ideala u R}. (3.7) Nula djelitelj prstena R je element

a ∈ R takav **da je a** ≠ 0 i **postoji b** ≠ 0 ∈ **R takav da je** 14

ab = 0. De nicija 3.8.3 Neka je I ⊂ R = k[x1,x2,...,xn]. Element F ∈ R je regularan element na R/I ako F = (F + I) nije djelitelj nule od R/I. Ekvivalentno, F je regularan na R/I ako kadgod je FG ∈ I, tada je G ∈ I. 103 De nicija 3.8.4 Niz F1, F2, . . . , Fm od R se naziva regularan niz od R/I ako je 1) F 1 je regularan na R/I i 2) Fi je regularan na R/(I,F1,F2,...,Fi−1). Teorema 3.8.1 Svi maksimalni regularni nizovi imaju iste du°ine i svaki regularni niz mo°e biti pro²iren do maksimalnog regularnog niza. De nicija 3.8.5 Dubina (engl. depth) u oznaci depth, od R/I je du°ina najdu°eg maksimalnog niza na R koji je sadr°an u m = (x1, x2, . . . , xn). Teorema 3.8.2 Za svaki ideal I ⊂ k[x1,x2,...,xn] = R vrijedi da je dubina depth(R/I) ≤ dim(R/I). De nicija 3.8.6 Prsten R/I je Cohen Macaulay ako je depth(R/I) = dim(R/I). Kona£an simplicijalan kompleks K je Cohen-Macaulay nad k ako za svaki simpleks σ ∈ K, Hi(linkKσ;k) = 0 za svako 0 ≤ i < dim(linkKσ), gdje je lin˜kK(σ) = {τ ∈ K : τ ∩ σ = ∅ i τ ∪ σ ∈ K}. Za dokaze navedenih tvrdnji i detaljniji pregled svojstva Cohen Macaulay kompleksa vidjeti [79]. Primjer 16 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja KI2(D1,n) za n = 3, n = 4 i n = 5 su Cohen Macaulay kompleksi. Rje²enje: Posmatramo li KI2(D1,n) za n = 3, n = 4 ili n = 5 uo£it ¢emo da nije mogu¢e izdvojiti potkompleks, tj. nije mogu¢e prona¢i σ ∈ KI2(D1,n) da se preostali dio datih tabli moºe poplo£ati dominama. Link σ je ili prazan skup ili ta£ka pa su njihove redukovane homologije trivijalne. Odakle zaklju£ujemo da su navedeni kompleksi Cohen Macaulay kompleksi. U nastavku ¢emo dati dokaz teoreme kojom se dokazuje da KI2(D1,n) za ? n ≥ 6 nisu Cohen Macaulay kompleksi. Teorema 3.8.3 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja KI2(D1,n), n ≥ 6 nisu Cohen Macaulay kompleksi. Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks poplo£avanja KI2(D1,n), gdje je n ≥ 6. Razmotrimo prvo slu£aj kada je n = 2k za neko k ≥ 3. Posmatrajmo σ ∈ KI2(D1,n) koji odgovara poplo£avanju regiona iz kojeg je izuzeta 104 tabla D1,6 tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa KI2(D1,n) moºemo poplo£ati dominama. Primijetimo da je tada linkKI2(D1,n)σ ∼= KI2(D1,6), dimenzije 1. Kompleks koji smo uo£ili ima netrivijalnu prvu kohomologiju H1(KI2(D1,6)) = Z. Zbog toga zaklju£ujemo da KI2(D1,n) za n = 2k, k ≥ 3 nije Cohen Macaulay kompleks. ˜ Slika 3.30: linkKI2(D1,n)σ ∼= D1,6 u slu£aju kada je n paran Sada razmotrimo slu£aj kada je n = 2k + 1 za neko k ≥ 3. Neka je σ ∈ KI2(D1,n) dio koji odgovara poplo£avanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla D1,7, analogno kao u prvom slu£aju. Tada vrijedi da je linkKI2(D1,n)σ ∼= KI2(D1,7), dimenzije 2. Uo£eni kompleks KI2(D1,7) ima netrivijalnu prvu kohomologiju H1(KI2(D1,7)) = Z, pa zaklju£ujemo da KI2(D1,n), n ≥ 6 i n = 2k + 1 za neko k ≥ 3 nije Cohen Macaulay kompleks. ˜ Slika 3.31: linkKI2(D1,n)σ ∼= D1,7 u slu£aju kada je n neparan Teorema 3.8.4 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja KI2(D2,n), n ≥ 2 nisu Cohen Macaulay kompleksi. Dokaz: Neka je dat simplicijalan kompleks poplo£avanja KI2(D2,n), gdje je n ≥ 2. Posmatrajmo σ ∈ KI2(D2,n) koji odgovara poplo£avanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla D2,2 tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa KI2(D2,n) moºemo poplo£ati dominama. Tada vrijedi da je linkKI2(D2,n)σ ∼= KI2(D2,2), dimenzije 2. Uo£eni kompleks KI2(D2,2) ima netrivijalnu nultu kohomologiju H0(KI2(D2,2)) = Z, pa zaklju£ujemo da KI2(D2,n), n ≥ 2 nije Cohen Macaulay kompleks. Teorema 3.8.5 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja KI2(Dm,n), m,n ≥ 3 ˜ nisu Cohen Macaulay kompleksi. Dokaz: Neka je dat simplicijalan kompleks poplo£avanja KI2(Dm,n), m, n ≥ 3. Razmotrimo prvo slu£aj kada je m ili n parno, bez smanjenja op¢enitosti neka je m = 2k, za neko k ≥ 2. 105 Slika 3.32: linkKI2 (Dm,n)σ ∼= D2,3 Slika 3.33: linkKI2 (Dm,n)σ =∼ D3,3 Posmatrajmo σ ∈ KI2(Dm,n), koji ¢e nam predstavljati dio razmatranog simplicijalnog kompleksa koji se moºe poplo£ati dominama, tj. posmatrat ¢emo simpleks koji odgovara poplo£avanju regiona iz kojeg smo izuzeli tablu 2×3. Primijetimo da se u linku od σ nalaze samo domine koje popunjavaju preostali 2×3 dio table kao na Slici 3.8, pa je link linkKI2(Dm,n)σ ∼= KI2(D2,3), £ija je dimenzija dim(linkKI2(D2,3)σ) = 2. KI2(D2,3) ima netrivijalnu prvu kohomologiju H1(KI2(D2,3)) = Z × Z to zaklju£ujemo da dati simplicijalni kompleks KI2(Dm,n) za m = 2k nije Cohen Macaulay kompleks. Razmotrimo˜ sada slu£aj kada su m i n neparni. Nadalje, posmatrajmo σ ∈ KI2(Dm,n) koji dobijamo izuzimanjem table D3,3 tako da se preostali dio simplicijalnog kompleksa KI2(Dm,n) moºe poplo£ati sa dominama. Pri- mijetimo da je tada linkKI2(Dm,n)σ ∼= KI2(D3,3), a £ija je dimenzija 3. Uo£eni potkompleks ima netrivijalnu drugu kohomologiju H2(KI2(D3,3)) = Z5, koju smo izra£unali upotrebom Sage programa, a ²to je prikazano u Primjeru 15. Na osnovu navedenog zaklju£ujemo da KI2(Dm˜,n) nije Cohen Macaulay kompleks. Primjer 17 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja KI3(D1,n) za n ≤ 7 su Cohen Macaulay kompleksi. Rje²enje: Posmatramo li KI3(D1,n) za n ≤ 7 uo£it ¢emo da nije mogu¢e izdvojiti potkompleks, tj. nije mogu¢e prona¢i σ ∈ KI3(D1,n) da se preostali dio datih tabli moºe poplo£ati I trominima. Link σ je ili prazan skup ili ta£ka pa su njihove redukovane kohomologije trivijalne. Odakle zaklju£ujemo da su navedeni kompleksi Cohen-Macaulay kompleksi. ? 106 Teorema 3.8.6 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja KI3(D1,n), n ≥ 8 nisu Cohen Macaulay kompleksi. Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks poplo£avanja KI3(D1,n), za n ≥ 8. Dokaz date tvrdnje ¢emo provesti kroz razmatranje sljede¢a tri slu£aja: 1) Neka je n = 3k − 1 za k ≥ 3. Posmatrajmo σ ∈ KI3(D1,n) koji odgovara poplo£avanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla D1,5 tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa KI3(D1,n) moºemo poplo£ati sa I trominima. Tada vrijedi da je linkKI3(D1,n)σ ∼= KI3(D1,5), a £ija je dimenzija 1. Kompleks KI3(D1,5) ima netrivijalnu prvu kohomologiju H1(KI3(D1,5))

= Z × Z, pa zaklju£ujemo da KI3(D1,n) za n = 3k − 1, k ≥ 3 nije Cohen Macaulay kompleks. 2) Neka je n = 3k za k ≥ 3. ˜ Posmatrajmo σ ∈ KI3(D1,n) koji odgovara poplo£avanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla D1,6 tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa KI3(D1,n) moºemo poplo£ati sa I trominima. Tada vrijedi da je linkKI3(D1,n)σ ∼= KI3(D1,6), a £ija je dimenzija 1. Kompleks KI3(D1,6) ima netrivijalnu nultu kohomologiju H0(KI3(D1,6)) = Z×Z, pa zaklju£ujemo da KI3(D1,n) za n = 3k, k ≥ 3 nije Cohen Macaulay kompleks. 3) Neka je n = 3k + 1 za k ≥ 3. Posmatrajmo σ ∈ KI3(D1,n) koji ˜ odgovara poplo£avanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla D1,7 tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa KI3(D1,n) moºemo poplo£ati I trominima. Tada vrijedi da je linkKI3(D1,n)σ ∼= KI3(D1,7), a £ija je dimenzija 1. Kompleks KI3(D1,7) ima netrivijalnu nultu kohomologiju H0(KI3(D1,7)) = Z, pa zaklju£ujemo da KI3(D1,n) za n = 3k+1, k ≥ 3 nije Cohen Macaulay kompleks. Na osnovu prvog, drugog i tre¢eg slu£a ja slijedi tvrženje dato u iskazu ˜ teoreme. Primjer 18 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja KI3(D2,n) za n = 3, n = 4 i n = 5 su Cohen Macaulay kompleksi. Rje²enje: Posmatramo li KI3(D2,n) za n = 3, n = 4 ili n = 5 uo£it ¢emo da nije mogu¢e izdvojiti potkompleks, tj. nije mogu¢e prona¢i σ ∈ KI3(D1,n) da se preostali dio datih tabli moºe poplo£ati I trominima. Link σ je ili prazan skup ili ta£ka pa su njihove redukovane homologije trivijalne. Odakle zaklju£ujemo da su navedeni kompleksi Cohen-Macaulay kompleksi. ? Teorema 3.8.7 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja KI3(D2,n), n ≥ 6 nisu Cohen Macualay kompleksi. 107 Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks poplo£avanja KI3(D2,n), za n ≥ 6. Dokaz date tvrdnje ¢emo provesti kroz razmatranje sljede¢a tri slu£aja: 1) Neka je n = 3k za k ≥ 2. Posmatrajmo σ ∈ KI3(D2,n) koji odgovara poplo£avanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla D1,6 tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa KI3(D2,n) moºemo poplo£ati sa I trominima. Tada vrijedi da je linkKI3(D2,n)σ ∼= KI3(D1,6), a £ija je dimenzija 1. Kompleks KI3(D1,6) ima netrivijalnu nultu kohomologiju H0(KI3(D1,6)) = Z×Z, pa zaklju£ujemo da KI3(D2,n) za n = 3k, k ≥ 2 nije Cohen Macaulay kompleks. 2) Neka je n = 3k + 1 za k ≥ 2. Posmatrajmo σ ∈ KI3(D2,n) koji ˜ odgovara poplo£avanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla D2,4 tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa KI3(D2,n) moºemo poplo£ati I trominima. Tada vrijedi da je linkKI3(D2,n)σ ∼= KI3(D2,4), a £ija je dimenzija 2. Kompleks KI3(D2,4) ima netrivijalnu prvu kohomologiju H1(KI3(D2,4)) = Z, pa zaklju£ujemo da KI3(D2,n) za n = 3k+1, k ≥ 2 nije Cohen Macaulay kompleks. 3) Neka je n = 3k + 2 za k ≥ 2. Posmatrajmo σ ∈ KI3(D2,n) koji ˜ odgovara poplo£avanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla D2,5 tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa KI3(D2,n) moºemo poplo£ati sa I trominima. Tada vrijedi da je linkKI3(D2,n)σ ∼= KI3(D2,5), a £ija je dimenzija 2. Kompleks KI3(D2,5) ima netrivijalnu prvu kohomologiju H1(KI3(D2,5)) = Z, pa zaklju£ujemo da KI3(D2,n) za n = 3k+2, k ≥ 2 nije Cohen Macaulay kompleks. Na osnovu prvog, drugog i tre¢eg slu£a ja slijedi tvrženje dato u iskazu ˜ teoreme. Teorema 3.8.8 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja KI3(D3,n), n ≥ 3 nisu Cohen Macaulay kompleksi. Dokaz: Neka je dat simplicijalan kompleks poplo£avanja KI3(D3,n), gdje je n ≥ 3. Posmatrajmo σ ∈ KI3(D3,n) koji odgovara poplo£avanju regiona iz kojeg je izuzeta tabla D3,3 tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa KI3(D3,n) moºemo poplo£ati I trominima. Tada vrijedi da je linkKI3(D3,n)σ ∼= KI3(D3,3), dimenzije 3. Uo£eni kompleks KI3(D3,3) ima netrivijalnu nultu kohomologiju H0(KI3(D3,3)) = Z, pa zaklju£ujemo da KI3(D3,n), n ≥ 3 nije Cohen Macaulay kompleks. Teorema 3.8.9 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja KI3(Dm,n), m,n ≥ 4 ˜ nisu Cohen Macaulay kompleksi. 108 Dokaz: Dokaz ove tvrdnje slijedi direktno na osnovu Teoreme 3.8.7 i Teoreme 3.8.8. Razmotrimo sada svojstvo Cohen-Macaulay i kod simplicijalnih kom- pleksa na torusnoj kvadratnoj mreºi. Teorema 3.8.10 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja KI2(T1,n), n ≥ 6 nisu Cohen Macaulay kompleksi. Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks poplo£avanja KI2(T1,n), gdje je n ≥ 6. Razmotrimo prvo slu£aj kada je n = 2k za neko k ≥ 3. Posmatrajmo σ ∈ KI2(T1,n) koji odgovara poplo£avanju regiona iz kojeg je izuzet dio kvadratne torusne mreºe T1,4 tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa KI2(T1,n) moºemo poplo£ati dominama. Primijetimo da je tada linkKI2(T1,n)σ =∼ KI2(T1,4), dimenzije 1. Kompleks koji smo uo£ili ima netrivijalnu nultu kohomologiju H0(KI2(T1,4)) = Z. Zbog toga zaklju£ujemo da KI2(T1,n) za n = 2k, k ≥ 3 nije Cohen

Macaulay kompleks. Sada razmotrimo slu£aj kada˜je n = 2k + 1 za neko k ≥ 3. Nadalje, neka je σ ∈ KI2(T1,n) koji odgovara poplo£avanju regiona iz kojeg je izuzet dio kvadratne torusne mre°e T1,5, analogno kao u prvom slu£aju. Tada vrijedi da je linkKI2(T1,n)σ ~= KI2(T1,5), dimenzije 2. Uo£eni kompleks KI2(T1,5) ima netrivijalnu prvu kohomologiju H1(KI2(T1,5)) = Z, pa zaklju£ujemo da KI2(T1,n), n ≥ 6 i n = 2k + 1 za neko k ≥ 3 nije Cohen Macaulay kompleks. ˜ Teorema 3.8.11 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja KI2(T2,n), n ≥ 2 nisu Cohen Macaulay kompleksi. Dokaz: Neka je dat simplicijalan kompleks poplo£avanja KI2(T2,n), gdje je n ≥ 2. Posmatrajmo σ ∈ KI2(T2,n) koji odgovara poplo£avanju regiona iz kojeg je izuzet dio kvadratne torusne mre°e T2,2 tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa KI2(T2,n) mo°emo poplo£ati dominama. Tada vrijedi da je linkKI2(T2,n)σ ~= KI2(T2,2), dimenzije 2. Uo£eni kompleks KI2(T2,2) ima netrivijalnu nultu kohomologiju H0(KI2(T2,2)) = Z, pa zaklju£ujemo da KI2(T2,n), n ≥ 2 nije Cohen Macaulay kompleks. Teorema 3.8.12 Simplicijalni kompleksi poplo£avanja KI3(T1,n), n ≥ 9 nisu ˜ Cohen Macaulay kompleksi. Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks poplo£avanja KI3(T1,n), za n ≥ 9. Dokaz date tvrdnje ¢emo provesti kroz razmatranje sljede¢a tri slu£aja: 1) Neka je n = 3k za k ≥ 3. Posmatrajmo σ ∈ KI3(T1,n) koji odgovara poplo£avanju regiona iz kojeg je izuzet dio kvadratne torusne mre°e 109 T1,6 tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa KI3(T1,n) mo°emo poplo£ati sa I trominima. Tada vrijedi da je linkKI3(T1,n)σ ~= KI3(T1,6), a £ija je dimenzija 1. Kompleks KI3(T1,6) ima netrivijalnu nultu kohomologiju H0(KI3(T1,6)) = Z, pa zaklju£ujemo da KI3(T1,n) za n = 3k, k ≥ 3 nije Cohen Macaulay kompleks. 2) Neka je n = 3k + 1 za k ≥ 3. Posmatrajmo σ ∈ KI3(T1,n) koji ˜ odgovara poplo£avanju regiona iz kojeg je izuzet dio kvadratne torusne mre°e T1,7 tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa KI3(T1,n) mo°emo poplo£ati sa I trominima. Tada vrijedi da je linkKI3(T1,n)σ ~= KI3(T1,7), a £ija je dimenzija 2. Kompleks KI3(T1,7) ima netrivijalnu prvu kohomologiju H1(KI3(T1,7)) = Z, pa zaklju£ujemo da KI3(T1,n) za n = 3k + 1, k ≥ 3 nije Cohen Macaulay kompleks. 3) Neka je n = 3k+2 za k ≥ 3. Posmatrajmo σ ∈ KI3(T1,n) koji odgovara ˜ poplo£avanju regiona iz kojeg je izuzet dio kvadratne torusne mre°e T1,5 tako da preostali dio simplicijalnog kompleksa KI3(T1,n) mo°emo poplo£ati I trominima. Tada vrijedi da je linkKI3(T1,n)σ ~= KI3(T1,5), a £ija je dimenzija 1. Kompleks KI3(T1,5) ima netrivijalnu nultu kohomologiju H0(KI3(T1,5)) = Z, pa zaklju£ujemo da KI3(T1,n) za n = 3k + 2, k ≥ 3 nije Cohen Macaulay kompleks. Na osnovu prvog, drugog i tre¢eg slu£a ja slijedi tvrženje dato u iskazu ˜ teoreme. 110 Glava 4 Homotopski tip simplicijalnih kompleksa poplo£avanja Pronalaze¢i razli£ite klase homotopija petlji mo°emo bolje i preciznije dati neke informacije o tom topolo²kom prostoru. Drugim rije£ima, ako pro²irenje puta u datom topolo²kom prostoru mo°e biti neprekidno deformisano, poma°e nam da bolje razumijemo kakav je to prostor. U ovom poglavlju dat ¢emo uvod u homotopiju simplicijalnih kompleksa poplo£avanja. De nicija 4.0.1 Neka je I = [0, 1] ⊂ R i neka je X topolo²ki prostor. Neprekidna funkcija f : I → X se naziva put u X . f (0) nazivamo inicijalna ta£ka, a f (1) krajnja ta£ka. De nicija 4.0.2 Neka je f : I → X put takav da je f (0) = f (1) = x0. Tada f zovemo petlja sa baznom ta£kom x0. De nicija 4.0.3 Neka su f : X →

Y i g : X → Y	neprekidna preslikavanja. Re¢	**i**	¢emo	**da su f**	i	**g**		25

homotopni putevi ako postoji neprekidno preslikavanje

F : X	× I →	**Y**	tako	**da za svako x ∈ X**	, F(	**x**	,0) =	**f(x) i**	F(	**x**	1

,1) = g(x). Funkcija F se naziva homotopija izmežu f i g, i pi²emo $f \simeq g$. De nicija 4.0.4 Neka su f i g putevi sa zajedni£kom po£etnom ta£kom x0 i krajnjom ta£kom x1. Ako postoji homotopija F iz f do g takva da je za svako t ∈

I, F (0, t) = x0 i **F (1, t) = x1** tada su f **i**	53

g homotopni putevi. Tada pi²emo $f \simeq_p g$. U preciznijoj terminologiji mogli bismo re¢i da funkcija ft generirana sa putem homotopije F je put iz x0 do x1. Drugim rije£ima, ksiramo li t ∈ I i zadamo funkciju ft(x) : I → X tako da ft(x) = F (x, t). Tada je ft put od x0 do x1. 111 Lema 4.0.1 (Pasting lemma) Neka je f : X → Y funkcija kojom se prostor X preslikava u prostor Y . Neka je A ∪ B = X, gdje su A i B, oba otvorena ili oba zatvorena podskupa od X. Ako

su f|A i f| **B** obje **neprekidne, tada je** i **f neprekidna**	26

. Dokaz Leme mo°e se prona¢i u [60] i [61]. Propozicija 4.0.1 ≃ i ≃p su relacije ekvivalencije. Dokazi se mogu prona¢i u [30], [60] i [61]. Neka je f put. Neka [f] ozna£ava klasu ekvivalencije svih puteva koji su homotopni sa f. Propozicija 4.0.2 Neka su f : X → Y i g : X → Y neprekidna preslikavanja. Neka je Y konveksan podskup od Rn. To zna£i da za svako a, b ∈ Y , linija segmenta izmežu a i b je neprekidna u Y . Tada postoji homotopija izmežu f i g koju nazivamo homotpijom ravne linije F : X × Y , gdje je F (x, t) = (1 − t)f (x) + (t)g(x). Ako su f i g putevi sa zajedni£kom po£etnom ta£kom tada je F put homotopija. Dokazi se mogu prona¢i u [60] i [61]. Neka je K simplicijalni kompleks i neka σ ∈ K. De ni²emo sljede¢i potkompleks od K del(σ, K) := {τ ∈ K : σ ? τ }, ko ji se naziva deletion od σ u K . Sli£no, potkompleks stK (σ) := {τ ∈ K : σ ∪ τ ∈ K }, nazivamo zvijezda (engl. star) od σ u K. Primijetimo da je linkK(σ) ⊂ stK(σ). D°oin simpleksa K i ta£ke v koje nije njegov vrh, tj. sa simplicijalnim kompleksom {∅,{v}} nazivamo konus i ozna£avamo sa coneK := K ∗ {∅, {v}}. D°oin simpleksa K i dvota£ke {∅, {u}, {v}} pri £emu u i v nisu vrhovi od K se naziva suspenzija od K, i va°i Σ(K) := K ∗ {∅, {u}} ∪ K ∗ K ∗ {∅, {v}}. Geometrijski gledano suspenzija je unija dva konusa nad K, polijepljena po K. O£igledno je da je coneK kontraktibilan topolo²ki prostor, dok je klasi£na £injenica da je Hi+1(ΣK) = Hi(K) za svako i. U ostatku poglavlja £esto ¢emo koristi naredne dvije leme £iji se dokazi mogu na¢i u [30] i [48]. 112 Lema 4.0.2 Neka je K simplicijalan kompleks i v vrh od K . Ako je linkK v kontraktibilan u delK v tada vrijedi K ≃ delK v ∨ Σ (linkK v) . Lema 4.0.3 Neka je K simplicijalan kompleks i {u,v} ivica od K. Ako je linkK{u,v} kontraktibilan u delK{u,v} tada vrijedi K ≃ K' ∨ Σ (linkK{u, v}) , gde je K' potkompleks od K koji se sastoji od svih τ ∈ K takvih da {u,v} ⊄ τ. 4.1 Fundamentalna grupa simplicijalnih kom- pleksa poplo£avanja U ovom dijelu prou£avamo fundamentalne grupe kompleksa poplo£avanja. Kao ²to ¢emo pokazati, kompleksi koji odgovaraju velikim regionima imaju trivijalne fundamentalne grupe. Koristit ¢emo se opisom fundamentalne grupe simplicijalnog kompleksa sa stranica putem grupom (vidjeti [74]). Teorema 4.1.1 Za m, n ≥ 4 fundamentalna grupa π1(KI2(Dm,n)) je trivi- jalna. Dokaz: Neka je dat simplicijalni kompleks poplo£avanja KI2(Dm,n) i neka su sa P1, P2, . . ., Pk ozna£ena postavljanja domine na tablu Dm,n. Svako postavljanje nam predstavlja jedan vrh simplicijalnog kompleksa KI2(Dm,n). Unutar datog simplicijalnog kompleksa posmatrat ¢emo petlje (puteve) koje su prezentovane sa nekim skupom vrhova datog simplicijalnog kompleksa i koji £ine neki cikl P1P2 . . . PkP1, pri £emu ivica PiPi+1 ∈ KI2(Dm,n). Dokazat ¢emo da su sve petlje kontraktibilne unutar kompleksa pomo¢u principa matemati£ke indukcije po du°ini cikla k. U slu£aju kada je cikl du°ine jedan, direktno slijedi da je P1 ≃ •. Za k = 2 tvrdnja je i dalje o£igledna i vrijedi da je P1P2P1 ≃ •. Posmatrajmo sada cikl du°ine 3, tj. P1P2P3P1. Nadalje, i u ovom slu£aju kada je k =

3 i dalje imamo trivijalan slu£aj, tj. kako je takav simplicijalan kompleks ag to trougao mo°emo sa°eti u ta£ku, tj. P1P2P3P1 ≃ •. Neka je sada dat cikl du°ine n = 4, tj. P1P2P3P4P1. Uo£imo da dati cikl mo°emo izdijeliti na mežusobno homotopne dijelove, tj. dati cikl svodimo na jedan od trivijalnih slu£ajeva, pa zaklju£ujemo da je cikl P1P2P3P4P1 ≃ •. Pretpostavimo sada da data tvrdnja vrijedi za sve ciklove £ija je du°ina manja od k. Doka°imo da data tvrdnja vrijedi i za du°inu cikla k. Neka 113 je dat cikl P1P2P3 . . . PkP1. U datom ciklom posmatrajmo neka £etiri uzastopna vrha Pi, Pi+1, Pi+2 i Pi+3. Ukoliko se parovi domina Pi i Pi+2 ne sijeku, o£igledno je da se ciklus homotopan sa P1P2P3 . . . PiPi+2 . . . PkP1 zbog postojanja trougla PiPi+1Pi+2, a koji je po induktivnoj hipotezi kontraktibalan unutar kompleksa. Analogno va°i i za par domina na pozicijama Pi+1 i Pi+3. Ostaje nam da razmotrimo slu£aj kad se parovi domina Pi i Pi+2, i Pi+1 i Pi+3 sijeku. Oni prekrivaju najvi²e 6 polja table Dm,n na kojoj se van njih moraju na¢i bar dva susjedna slobodna polja. Unutar simplicijalnog kompleksa KI2(Dm,n) uo£imo da uvijek mo°emo prona¢i vrh Pj koje je disjunktno sa odabrana £etiri uzastopna vrha datog cikla. Zbog toga je dio cikla PiPi+1Pi+2Pi+3 homotopan sa PiPjPi+3. Odakle zaklju£ujemo da se dati cikl homotopno mo°e smanjiti na cikl manje du°ine od k. Kako su svi ciklovi po induktivnoj pretpostavci £ija je du°ina manja od k homotopni sa ta£kom to je i dati cikl homotopan sa ta£kom, tj. P1P2P3 . . . PkP1 ≃ •. Na osnovu £ega zaklju£ujemo da je fundamentalna grupa simplicijalnih kompleksa poplo£avanja KI2(Dm,n) trivijalna. Dokaz prethodne teoreme vrijedi u mnogo generalnijem slu£aju kom- pleksa. Neka je zadat neki kona£an skup poliomino oblika T i KT (Dm,n) simplicijalni kompleks poplo£avanja table m×n sa T . Najprije ¢emo pokazati sljede¢i stav. Propozicija 4.1.1 Postoji cijeli broj l(T) takav da je broj vrhova u K(M ; T) \ linkK(M;T)v nije ve¢i od l(T) za svaki region M u ravni i svaki vrh od K(M ; T). Dokaz: O£igledno, za proizvoljan poliomino u ravni postoji kona£no mnogo postavljanja poliomina iz T u ravni tako da ga sijeku. Time je i povr²ina unije svih poliomina koji ga prekrivaju kona£na. Odavde slijedi dato tvrženje. Teorema 4.1.2 Postoji cijeli broj p(T) takav da je π1(KPs(Dm×n)) trivi- jalno za svako m, n ≥ p(T). Dokaz: Dokaz ¢emo provesti na osnovu principa matemati£ke indukcije po du°ini ciklova da doka°emo da je simplicijalni kompleks nulhomoto- pan u KPs(Dm×n). Cikl du°ine jedan i dva su o£igledno nulhomotopni. Pretpostavimo da su svi ciklovi du°ine k nulhomotopni. Razmotrimo cikl α = V0V1 . . . Vk gdje je Vi neki vrh u kompleksu KPs(Dm×n). Iz Propozicije 4.1.1, slijedi da u KPs(Dm×n) \ L gdje je L = linkKPs(Dm×n)Vk−1 ∪ linkKPs(Dm×n)Vk ∪ linkKPs(Dm×n)V0 ∪ linkKPs(Dm×n)V1 nema(vi²e od l(T) vrhova, to je put Vk−1VkV0V1 sadr°an od zvijezda vrhova) V za sve dovoljno velike brojeve m i n. Nadalje, α je homotopan sa ciklom V V1 . . . Vk−1, koji je po indukcijskoj hipotezi nulhomotopan. 114 Argument prethodne teoreme zapravo va°i u najgeneralnijem slu£aju: Teorema 4.1.3 Postoji prirodni broj s(T) takav da je za sve m, n ≥ s(T) fundamentalna grupa π1(KT (Dm,n)) trivijalna. Dokaz: U dokazu teoreme 4.1.1 klju£ni argument je da na tabli obezbijedimo dovoljno prostora za postavljanje petog oblika u induktivnom koraku. Zaista, kako radimo sa poliomino oblicima koji imaju kona£an broj polja ukoliko je tabla dovoljno velika, ona ¢e posjedovati svojstvo da kako god postavili kona£an broj r oblika iz T uvijek mo°emo dodati (r + 1)-vi oblik koji je disjunktan sa svima njima. Posljedica ove opservacije je da tvrženje va°i i za tablu m × n na torusu. Teorema 4.1.4 Postoji prirodni broj t(T) takav da je za sve m, n ≥ t(T) fundamentalna grupa π1(KT (Tm,n)) trivijalna. Teoreme 4.1.3 i 4.1.4 zapravo impliciraju da su simplicijalni kompleksi poplo£avanja asocirani tablama m × n netrivijalne samo za kona£no mnogo vrijednosti, a brojevi s(T) i t(T) su invarijante datog skupa poliomino oblika T . Bilo bi zanimljivo poku²ati o ovim brojevima ne²to vi²e re¢i za neke specijalne klase k-omina. Problem 1 Ocijeniti s(T) i t(T) za I i L k-omino u funkciji od k. 4.2 Povezanost simplicijalnih kompleksa poplo- £avanja U ovom paragrafu disertacije dat ¢emo uvodna razmatranja u povezanost simplicijalnih kompleksa poplo£avanja. Kompleksi KPs(Dm×n) i KPs(Tm×n) te°e da imaju trivijalnu fundamentalnu grupu i da budu 2 povezani za dovoljno velike m i n. Za prostor X ka°emo da je n povezan ako za svako 0 ≤ k ≤ n, vrijedi da je πk(X) = 0, ili ekvivalentno ka°emo X je neprazan i svako neprekidno preslikavnaje Sk → X je nulhomotopno. Primijetimo da je ovaj

rezultat specijalni slu£aj [8, Propozicije 7]. Simplicijalni kompleks KPs(Tm×n) je primjer r konusnog kompleksa koji je uveo Jonathan Barmak u [8] za dovoljno velike m i n. Neka je r ≥ −1 cijeli broj. De nicija 4.2.1 Simplicijalni kompleks K se naziva r-konusan ako bilo koji kompleks od K na r le°i u zvijezdi stKv nekog vrha v ∈ K. 115 Sljede¢i stav karakteri²e bitno homotopsko svojstvo simplicijalnih kom- pleksa poplo£avanja. Propozicija 4.2.1 Postoji cijeli broj r(T) takav da je KT (Dm×n) r-konusan za sve m, n ≥ r(T). Dokaz: Prema stavu 4.1.1 za bilo kojih r vrhova v1, . . . , vr od KT (Dm×n) postoji najvi²e r · l(T) vrhova koji le°e izvan linkKT (Dm×n)v1 ∪ . . . linkKT (Dm×n)v1 pa za dovoljno velike m i n postoji vrh v takvo da v1, . . . , vr ∈ linkKT (Dm×n)v. Po²to je K(m, n; T) ag kompleksbilo koji potkompleks od KT (Dm×n) na v1, . . . , vr je sadr°an u stK(m,n;T)v, pa je K(m, n; T) r-konusan. Zapravo, ovaj argument mo°emo primijeniti u mnogo ²irem kontekstu. Neka je Mn niz regiona u ravni ili na torusu takav da broj vrhova u K(Mn; T) raste kako n → ∞. Ovakav niz regiona nazivamo rastu¢im. Va°i da je Lema 4.2.1 Postoji m(T) takav da je K(Mn; T) i r-konusan za sve n ≥ m(T). U [8, Theorem 12], Barmak je dokazao da je 6n-konusni kompleks n- povezan. Prema tome, ovaj rezultat sa na²om Lemom 4.2.1 ka°e: Posljedica 4.2.1 Za rastu¢i niz regiona Mi i zadati skup poliomino oblika T , postoji niz prirodnih brojeva pk(Mi, T) takav da je πkK(Mn; T) trivijalan za svako n ≥ pk(Mi; T). Brojevi pk(Mi, T) povezuju kombinatoriku od T i regiona Mi sa to- pologijom od K(Mi; T). Poznato je da je naprimjer p0(K(1, n; 2) = 5, p1(K(

1, n; 2) = 8, p0(**K(n, n** ; 2) = 3, p1(**K(n, n; 2**

) = 2 i jo² neke vrijednosti koje bi slijedile iz na²ih eksperimenata i primjena Hurevi£eve teoreme. No, odrediti ta£nu vrijednost od pk(Mn, T) u op²tem slu£aju je te²ko; £ak i u jednostavnijim slu£ajevima za koje znamo da K(Mi; T) imaju homotopski tip ved°ova sfera. Problem 2 Dati ocjenu pk(Mn, T) u zavisnosti od n za dati rastu¢i niz regiona Mn i skup poliomino oblika T 4.3 Homotopski tip simplicijalnih kompleksa poplo£avanja U ovom paragrafu razmotrit ¢emo homotopski tip simplicijalnih kom- pleksa asociranih sa postavljanjem Ik omina na kvadratnoj tabli i na 116 kvadratnoj torusnoj mre°i 1 × n. Ovaj problem je originalno razmatrao Kozlov u [48] u kontekstu kompleksa nezavisnosti grafa koji je pokazao da je za n ≥ 1 S k−1 ako je n = 3k, KI2(D1×n) = ⎧ ptk ako je n = 3k + 1, ⎫ S ako je n = 3k + 2. i da je za n ≥ 3 ⎩ TI2(D1×n) = kk−−11 ∨ Sk−1 S ako je r = 3k, { S ako je r = 3k ± 1. Matsushita je pokazao u [55] da je KI2(D2×n) homotopan ved°u sfera, a nedavno je u [73] isti rezultat pokazan i za KI2(D3×n). No, ovi rezultati su razmatrani u kontekstu grafovskih kompleksa, tematike koja privla£i posebnu pa°nju nau£ne javnosti, oblasti u kojoj je lijep doprinos dala i Marija Jeli¢ Milutinovi¢ u svojoj doktorskoj disertaciji [57] i radovima [9] i [58]. Veza sa grafovskim kompleksima sparivanja i kompleksima poplo£avanja je evidentna i kompleksi koje mi razmatramo se mogu smatrati uop²tenjem ovih objekata. Naredni rezultati su dobijeni sli£nim metodama, naj£e²¢e primjenom Lema 4.0.2 i 4.0.3. Propozicija 4.3.1 Za n ≥ i1 + ik vrijedi k i1 k KI1,I2,...,Ik (D1×n) ≃ ΣKI1,I2,...,Ik (D1×(n−1))∨ ΣKI1,I2,...,Ik (D1×(n−il−r)) jV=2 rV=2 Vl=1 Dokaz: Ozna£imo KI1,I2,...,Ik(D1×n) sa K. Primijenimo Lemu 4.0.2 nekoliko puta. Neka je uj vrh koji odgovara postavljanju od 1 × Ij I-omina na prvu ¢eliju ij ¢elija od 1 × n table. Vrijede slijede¢e tvrdnje: 1. linkKuj ∼= KI1,I2,...,Ik(D1×(n−ij)) za svako 1 ≤ j ≤ k 2. u1 ∈ delK uj za svako 2 ≤ j ≤ k 3. linkKuj' ? linkKuj" za svako 1 ≤ j' < j" ≤ k Prethodne tvrdnje impliciraju da linkKu2 le°i u linku od u1 u delKu2 to mo°emo primjeniti Lemu 4.0.2 na u2. Primjenom prethodno navedne Leme dobijamo da vrijedi da je K ≃ delKu2 ∨ ΣKI1,I2,...,Ik(D1×(n−i2)). 117 Za svako j ≥ 3 slijedi da je linkKuj ∼= linkdelKu2uj. Nastavimo li primjenjivati Lemu 4.0.2 za u3, . . . , uk, redom kao rezultat primjene dobit ¢emo K ≃ X ∨ ΣKI1,I2,...,Ik(D1×(n−ik)) ∨ · · · ∨ ΣKI1,I2,...,Ik(D1×(n−i2)), gdje je X simplicijal kompleks dobijen iz K kada se obri²u svi simpleksi koji sadr°e jedno od vrhova u2, . . . , uk. Nastavimo primjenjivanje Leme 4.0.2 na X. Sa urj ozna£imo vrh koji odgovara postavljanju od 1 × Ij I-omina na 1 × n tablu tako da prva r − 1 i n − ij − r + 1 ¢elija nisu pokrivene. Tada slijedi da linkXurj =∼ KI1,I2,...,Ik(D1×(n−ij−r+1)) i linkXurj le°e u linku od u1 u delXurj. Primjenimo li Lemu 4.0.2 u21, ..., u2k, u13, ..., u3k, ..., ui11, ..., uik1, respektivno. Slijedi da je i1 k X ≃ Y ∨ ΣKI1,I2,...,Ik(D1×(n−ij−r+1)), r∨=1j∨=1 gdje je Y dobijen iz X brisanjem svih simpleksa koji sadr°e jedan od vrhova ujr gdje je 1 ≤ j ≤ k, i 2 ≤ r ≤ i1. Mežutim, kako smo ve¢ uklonili sve vrhove izvan linkKu1, Y je simpleks cone sa vrhom u u1 i kontraktibilan je. Odakle slijedi tvrženje. Na osnovu Propozicije 4.3.1 direktno slijedi tvrženje Teorema 4.3.1. Teorema 4.3.1 Simplicijalni kompleks poplo£avanja KI1,...,Ik(D1×n) ima homotopski tim ved° sfera. U nastavku ¢emo dati dokaz sli£nog rezultata, ali u slu£aju kada se razmatra simplicijalni kompleks asociran postavljanjem I-omino oblika na torusnu kvadratnu mre°u dimenzije 1 × n. Neka su i1 < i2 < · · · < ik pozitivne cjelobrojne vrijednosti i T se sastoji od 1 × Ij I-omina za svaki 1 ≤ j ≤ k i neka je sa KI1,I2,...,Ik(Tm×n) ozna£en simplicijalni kompleks poplo£avanja na kvadratnoj torusnoj mre°i m × n. Propozicija 4.3.2 Simplicijalni kompleks poplo£avanja KI1(T1×n) ima ho- motopski tip ved° sfera. Dokaz: Neka su ¢elije na tabli ozna£ene sa 1, . . . , n i vrh koji odgovara postavljanju 1×I1 I-omina na tablu tako da prekriva ¢elije i, . . . , i+i1 ozna£en sa ui. Primjenimo li Lemu 4.0.3 nekoliko puta na stranice {u1, ui1+1}, . . . , {ui1, u2i1} dobijamo da KI1(T1×n) ≃ ∨I1ΣKI1(D1×(n−2i1)) ∨ K'. 118 K' je potkompleks od K koji se sastoji od τ ∈ K tako da {uj, ui1+j} ⊄ τ za svako 1 ≤ j ≤ i1. Primijenimo sada Lemu 4.0.2 redom na u1, . . . , ui1 tada dobijamo K' ≃ ∨I1ΣK(D1×(n−i1−1))I1 ∨ KI1(D1×(n−1)). Tvrženje slijedi iz Teoreme 4.3.1. Teorema 4.3.2 Simplicijalni kompleks poplo£avanja KI1,...,Ik(T1×n) ima ho- motopski tip ved° sfera. Dokaz: Neka je ui vrh simplicijalnog kompleksa KI1,...,Ik(T1×n) koji odgovara postavljanju 1 × Ik I-omina na tablu tako da prekriva ¢elije i, . . . , i + ik i vi vrh od KI1,...,Ik(T1×n) koji odgovara postavljanju 1×I1 I-omina na tablu tako da prekriva ¢elije i, . . . , i + i1. Vrijedi da je linkTui ⊂ linkTvi. Primijenimo li Lemu 4.0.2 na vrh u1 dobit ¢emo da vrijedi KI1,...,Ik(T1×n) ≃ ΣKI1,...,Ik(D1×(n−ik)) ∨ delTu1. Primijenimo li nekoliko puta uzastopno Lemu 4.0.2 na u2, . . . , uik dobijamo da KI1,...,Ik(T1×n) ≃ ∨ikΣKI1,...,Ik(D1×(n−ik)) ∨ T', gdje je T' potkompleks od T koji sadr°i sve simplekse σ ∈ KI1,...,Ik(T1×n) tako da σ ∩ {u1, . . . , uik}. Nadalje, ponovno imamo da vrijedi linkT'ui ⊂ linkT'vi to mo°emo primijeniti Lemu 4.0.2 na vrh uik+1. Odakle, slijedi da je T' ≃ ΣlinkT'uik+1 ∨ delT'uik+1. U oba linka linkT'uik+1 i delT'uik+1 mo°emo primjenjivati Lemu 4.0.2 na pomenuti vrh uj sve dok ne iscrpimo sve vrhove koji nastaju iz postavljanja 1 × I1 I-omina na kvadratnu torusnu plo£u. Odakle slijedi da ved° simpleksi tipa KI1,...,Ik−1(D1×m) koji se pojavljuju iz suspenzije linkova, i KI1,...,Ik−1(T1×n) kao deletion od vrhova u posljednjoj primjeni Leme 4.0.2. Tvrdnja Teoreme slijedi iz Teoreme 4.3.1, Propozicije 4.3.2 i indukcije po k. Ovi simplicijalni kompleksi su interesantni sa kombinatorne strane, po²to nisu Cohen-Macaulay kompleksi, a imaju homotopski tip ved°a sfera. Takvi primjeri su ve¢ poznati u literaturi, ali klasa kompleksa koje smo prou£ili sigurno zaslu°uje dalju analizu. Primijetimo da ako je m < i1 zbog nemogu¢nosti vertikalnog postavljanja I-omina na tablu va°i KI1,...,Ik (Dm×n) ∼= KI1,...,Ik (D1×n) ∗ · · · ∗ KI1,...,Ik (D1×n) m ⏟ 119 ⏟ ⏟ kao i odgovaraju¢a dekompozicija u torusnom slu£aju KI1,...,Ik(Tm×n) ∼= KI1,...,Ik(T1×n) ∗ · · · ∗ KI1,...,Ik(T1×n) . m Zbog toga imamo ⏟ ⏟ ⏟ Posljedica 4.3.1 Ako je m < i1 KI1,...,Ik(Dm×n) i KI1,...,Ik(Tm×n) imaju homotopski tip ved°a sfera. Ovi rezultati zajedno sa primjerima koji su uraženi uz pomo¢ ra£unara sugeri²u sljede¢u hipotezu Hipoteza 4.3.1 Za prirodne brojeve m i n i kona£ni skup poliomino oblika T simplicijalni kompleksi KT (Dm×n) i KT (Tm×n) imaju homotopski tip ved°a sfera. 120 Literatura [1] E. T. Akhmedov, S. R. Shakirov, Gluings of Surfaces with Polygonal Boundaries, Functional Analysis and Its Applications (2009), Volume 43, Issue 4, Pages 3 13. [2] F. Ardila, R. P. Stanley, Tilings, The Mathematical Intelligencer (2010), Volume 32, Issue 4, Pages 32 43. [3] W. W. R. Ball, H. S. M. Coxeter, Mathematical Recrea- tions and Essays, 13th edition, New York: Dover Publications, 1987. [4] Ð. Barali¢, Topologija i kombinatorika kvazitorusnih mnogo- strukosti k stepena , Doktorska disertacija, MF, Beograd, 2013. [5] Ð. Barali¢, 300 pripremnih zadataka za juniorske matemati£ke olimpijade Iskustvo Srbije , Klet, Beograd, 2016. [6] G. Barequet, S. W. Golomb, D. A. Klarner , Handbook of Discrete and

Computational Geometry , 3rd edition, Chapmann & Hall/CRC, Boca Raton, 2018. [7] G. Barequet, G. Rote, M. Shalah, λ > 4: An improved lower bound on the growth constant of polyominoes, Communi- cations of the ACM (2016), Volume 59, Issue 7, Pages 88 95. [8] J. A. Barmak, Connectivity of ample, conic and random simplicial complexes , preprint https://arxiv.org/pdf/2103.03952.pdf [9] M. Bayer, B. Goeckner, M. Jelic Milutinovi¢, Manifold Matching Complexes, Mathematika (2020), Volume 66, Issue 4, Pages 973 1002. 121 [10] A. Björner, G. Kalai, On f vectors and homology , Annals New York Academy of Sciences (1989), Volume 555, Issue 1, Pages 63 80. [11] A. Björner, P. Frankl, R. Stanley, The number of faces of balanced Cohen Macaulay complexes and a generalized Macaulay theorem, Combinatorica (1987), Volume 7, Issue 1, Pages 23 34. [12] G. Bredon, Topology and Geometry , Graduate Texts in Mat- hematics, Springer Verlag, New York, 1993. [13] W. Bruns, J. Herzog, Cohen Macaulay rings , Cambridge University Press, Cambridge, 1998. [14] V. Buchstaber, T. Panov, N. Ray, Spaces of polytopes and cobordisms of quasitoric manifolds, Moscow Mathematical Journal (2007), Volume 7, Issue 2, Pages 219 242. [15] S. S. Cairns, Introductory Topology , The Roland Press Com- pany, New York, 1961. [16] S. C. Carlson, Topology of surfaces, knots and manifolds , John Wiley & Sons, Inc., 2001. [17] J. H. Conway, J. C. Lagarias, Tilings with polyominoes and combinatorial group theory , Journal of Combinatorial Theory, Series A (1990), Volume 53, Issue 2, Pages 183 208. [18] A. R. Conway, A. J. Guttmann, On Two Dimensional Percolation, Journal of Physics A: Mathematical and General (1995), Volume 28, Issue 4, Pages 891 904. [19] D. Cook II, U. Nagel, Cohen Macaulay Graphs and Face Vectors of Flag Complexes , SIAM Journal on Discrete Mathe- matics (2010), Volume 26, Issue 1, Pages 89 101. [20] M. Eden, A Two-Dimensional Growth Process , Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability University of California Press (1961), Volume 4, Pages 223 239. [21] A. Frohmader, Face Vectors of Flag Complexes , Israel Jour- nal of Mathematics (2008), Volume 164, Issue 1, Pages 153 164. 122 [22] M. Gardner, Hexa exagons and other mathematical diver- sions: the rst Scienti c American book of puzzles & games , University of Chicago Press, 1988. [23] N. D. Gilbert, T. Porter, Knots and Surfaces , Oxford University Press, 1994. [24] S. W. Golomb, Checker Boards and Polyominoes , American Mathematical Monthly (1954), Volume 61, Issue 10, Pages 675 682. [25] S. W. Golomb, Polyominoes , Scribners, New York, 1965. [26] S. W. Golomb, Tiling with Polyominoes , Journal of Combina- torial Theory (1966), Volume 1, Issue 2, Pages 280 296. [27] S. W. Golomb, Tiling with Sets of Polyominoes , Journal of Combinatorial Theory (1970), Volume 9, Issue 1, Pages 60 71. [28] S. W. Golomb, Polyominoes Which Tile Rectangles , Journal of Combinatorial Theory, Series A (1989), Volume 51, Issue 1, Pages 117 124. [29] J. E. Goodman, J. O'Rourke, Handbook of Discrete & Com- putational Geometry, Chapman & HALL/CRC, Boca Raton, 2004. [30] A. Hatcher, Algebraic Topology , Cambridge University Press, 2002. [31] J. Harer, D. Zagier, The Euler Characteristic of the Moduli Space of Curves I , Inventiones Mathematicae (1986), Volume 85, Issue 1, Pages 457 485. [32] M. Höchster, Rings of invariants of tori, Cohen Macaulay rings generated by monomials, and polytopes , Annals of Mathe- matics (1972), Volume 96, Issue 2, Pages 318 337. [33] I. Jensen, A. J. Guttmann, Statistics of lattice animals (po- lyominoes) and polygons , Journal of Physics A: Mathematical and General (2000), Volume 33, Issue 29, Pages L257 L263. [34] I. Jensen, Enumerations of lattice animals and trees , Journal of Statistical Physics (2001), Volume 102, Issue 3, Pages 865 881. 123 [35] I. Jensen, Counting polyominoes: A parallel implementation for cluster computing , Proceedings of the ICCS: International Conference on Computational Science (2003), Volume 2659, Part III, Pages 203 212. [36] D. Joji¢, O nekim kombinatornim i algebarskim metodama u enumeraciji politopa i poseta , Doktorska disertacija, MF, Beograd, 2005. [37] M. Juhnke Kubitzke, S. Murai, Balanced generalized lower bound inequality for simplicial polytopes, In: Selecta Mathema- tica (2018), Volume 24, Issue 2, Pages 1677 1689. [38] M. Juhnke Kubitzke, L. Venturello , A balanced non partitionable Cohen Macaulay complex , Algebraic Combinato- rics (2019), Volume 2, Issue 6, Pages 1149 1157. [39] M. Juhnke Kubitzke, L. Venturello, Balanced shellings and moves on balanced manifolds, Advances in Mathematics (2021), Volume 379, Issue 2, Pages 107571. [40] M. Juhnke Kubitzke, L. Venturello, Graded Betti num- bers of balanced simplicial complexes, In: ArXiv e-prints (No- vember, 2018). https://arxiv.org/abs/1811.03892.pdf . [41] M. Juhnke Kubitzke, S. Murai, I. Novik, C. Sawaske , A generalized lower bound theorem for balanced manifolds , In: Math. Z. 289.3 4 (2018), pp. 921 942. issn: 0025 5874. [42] J. J. Kjaer, Duality theorems for simplicial complexes , Bac- helor thesis in mathematics (Advisor: Jesper Michael Møller), Department of Mathematical Sciences, University of Copenha- gen, June 4th, 2011. [43] D. A. Klarner, Cell Growth Problems, Canadian Journal of Mathematics (1967), Volume 19, Issue 1, Pages 851 863. [44] D. A. Klarner, R. L. Rivest, A procedure for improving the upper bound for the number of n ominoes, Canadian Journal of Mathematics , Volume 25, Issue 3, Pages 585 602. [45] L. C. Kinsey, Topology of Surfaces , Springer Verlag, New York, 1993. 124 [46] S. Klee, I. Novik, Lower Bound Theorems and a Generalized Lower Bound Conjecture for balanced simplicial complexes , Mathematika (2016), Volume 62, Issue 2, Pages 441 477. [47] R. Koch, Classi cation of Surfaces , Lecture notes: https://pages.uoregon.edu/koch/math431/Surfaces.pdf [48] D. N. Kozlov, Complexes of directed trees , Journal of Com- binatorial Theory, Series A (1999), Volume 88, Issue 1, Pages 112 122. [49] J. M. Lee, Introduction to Topological Manifolds , 2nd edition, Springer Science+Business Media, LLC, New York, 2011. [50] E. Lidan, D-. Barali¢, Homology of polyomino tilings on at surfaces , Applicable Analysis and Discrete Mathematics (2021), https://doi.org/10.2298/AADM210307031L [51] F. S. Lima Impellizieri, Domino Tilings of the Torus , Master thesis, Ponti ca Univesidade Catolica do Rio de Janerio, 2016. [52] W. F. Lunnon, Counting Polyominoes , In Computers in Number Theory (Ed. A. O. L. Atkin, B. J. Brich). London: Academic Press, Pages 347-372, 1971. [53] W. F. Lunnon, Counting Hexagonal and Triangular Polyomi- noes. In Graph Theory and Computing (Ed. R. C. Read). New York: Academic Press, 1972. [54] N. Madras, A pattern theorem for lattice clusters , Annals of Combinatorics (1999), Volume 3, Issue 2, pp. 357 384. [55] T. Matsushita, Matching Complexes of Small Grids, The Electronic Journal of Combinatorics (2019), Volume 26, Issue 3 [56] S. Mertens, Lattice Animals A Fast Enumeration Algorithm and New Perimeter Polynomials , Journal of Statistical Physics (1990), Volume 58, Issue 5, Pages 1095 1108. [57] M. Jeli¢ Milutinovi¢, Kombinatorna topologija i grafovski kompleksi , Doktorska disertacija, MF, Beograd, 2021. 125 [58] M. Jeli¢ Milutinovi¢, , H. Jenne, A. McDonough, and J. Vega, Matching complexes of trees and applications of the matching tree algorithm , preprint https://arxiv.org/pdf/1905.10560.pdf [59] J. R. Munkres, Elements of Algebraic Topology , The Benja- min/Cummings Publishing Company, Inc., California, 1984. [60] J. R. Munkres, Topology; a First Course , Englewood Cli s, Prentice Hall, Inc., New Jersey, 1974. [61] J. R. Munkres, Topology, 2nd Edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, 2000. [62] M. Muzika Dizdarevi¢, R. šivaljevi¢ , Symmetric polyo- mino tilings, tribones, ideals, and Gröbner bases , Publications de l'Institut Mathematique (2015), Volume 98, Issue 112, Pages 1 23. [63] M. Muzika-Dizdarevi¢, M. Timotijevi¢, R. šivaljevi¢ , Signed polyomino tilings by n-in-line polyominoes and Gröbner bases , Publications de l'Institut Mathematique (2016), Volume 99, Issue 113, Pages 31 42. [64] G. L. Naber, Topological Methods in Eucledean Spaces , Dover Publications, Inc., New York, 2000. [65] R. C. Read, Some Applications of Computers in Graph Theory , In Selected Topics in Graph Theory (Ed. L. W. Beineke, R. J. Wilson). New York: Academic Press, Pages 417 444, 1978. [66] D. H. Redelmeier, Counting polyominoes: Yet another at- tack , Discrete Mathematics (1981), Volume 36, Issues 2, Pages 191 203. [67] M. Reid, Tile homotopy groups , L'Enseignement Math'ematique (2003), Volume 49, Issues 1, Pages 123 155. [68] M. Reid, Tiling with Similar Polyominoes , Journal of Recrea- tional Mathematics (2002), Volume 31, Issues 1, Pages 15 24. [69] M. Reid, Many L-Shaped Polyominoes Have Odd Rectangular Packings , Annals of Combinatorics (2014), Volume 18, Issues 2, Pages 341 357. 126 [70] G. A. Reisner, Cohen Macaulay quotients of polynomial rings, Advances in Mathematics (1976), Volume 21, Issues 1, Pages 30 49. [71] J. Roksvold, H. Verdure, Betti numbers of skeletons, In: ArXiv e prints 1502.05670

(Feb. 2015). http://adsabs.harvard.edu/abs/2015arXiv150205670R [72] E. Rémila, On the tiling of a torus with two bars , Theoretical Computer Science (1994), Volume 134, Issues 2, Pages 415 426. [73] S. Goyal, S. Shukla, A. Singh, Matching complexes of 3×n grid graphs, In: ArXiv e prints 2106.09915 (June 2021). https://arxiv.org/pdf/2106.09915.pdf [74] E. H. Spanier, Algebraic Topology , McGraw-Hill, New York, 1966. [75] R. P. Stanley, Enumerative combinatorics , Cambridge Uni- versity Press, 1999. [76] R. P. Stanley, The upper bound conjecture and Cohen Macaulay rings , Studies in Applied Mathematics (1975), Volume 54, Issues 2, Pages 135 142. [77] R. P. Stanley, Cohen Macaulay complexes , Higher Combi- natorics. NATO Advanced Study Institutes Series (Series C - Mathematical and Physical Sciences) (1977), Volume 31, Issues 1, Pages 51 62. [78] R. Stanley, Balanced Cohen Macaulay complexes , Transacti- ons of the American Mathematical Society (1979), Volume 249, Issues 1, Pages 139 157. [79] R. Stanley, Combinatorics and Commutative Algebra , 2nd edition, Birkhäuser, Boston, 1996. [80] J. Stillwel, Classical Topology and Combinatorial Group Theory , Springer Verlag, New York, 1993. [81] The Sage Developers, SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.0). http://www.sagemath.org 127 [82] H. Zheng, Ear Decompostion and Balanced 2 neighborly Sim- plicial Manifolds , The Electronical Journal of Combinatorics (2020), Volume 27, Issue 1, Pages 1 17. [83] J. R. Weeks, The Shape of Spaces , 3th Edition, Taylor and Francis Group, Boca Raton, 2020. 128 Biogra ja Edin Ližan rožen je 15.12.1986. godine u Cazinu. Stalno nastanjen u Gradini Cazin. Oºenjen. Otac jednog djeteta. Osnovnu ²kolu je zavr²io u JU O' Ostroºac u Ostro²cu, a potom op¢u gimnaziju JU Gimnazija Cazin s odli£nim uspjehom. Studij Matematike i informatike je upisao 2005. godine na Pedago²kom fakultetu Univerziteta u Biha¢u. Studij zavr²ava 2009. godine s prosje£nom ocjenom 8,36. U 2010. godini se upisuje na magistarski studij na Filozofskom fakultetu Univerziteta u Zenici, smjer Matematika i informatika. Magistarski studij zavr²ava 2013. godine s prosje£nom ocjenom 8,86 i sti£e akademsko zvanje magistar matematike i informatike. Magistarski rad pod nazivom Kriptosistemi s javnim klju£em u funkciji rje²avanja problema autenti kacije i nepobitnosti je odbranio pod mentorstvom profesora dr. sc. Bernadina Ibrahimpa²i¢a. Od decembra 2015. godine je student doktorskih studija Matematike na Prirodno-matemati£kom fakultetu Univerziteta Crne Gore, gdje je po£eo saradnju sa dr. sc. Đoržem Barali¢em. Prvo radno iskustvo stekao je u II srednjoj ²koli u Cazinu gdje je radio kao profesor matematike. Od juna 2010. godine zaposlen je na Pedago²kom fakultetu Univerziteta u Biha¢u, gdje je izabran u zvanje asistenta, a kasnije vi²eg asistenta, na oblast Algebra i metodika nastave matematike. Koautor je univerzitetskog udºbenika. Ima nekoliko objavljenih nau£- nih/stru£nih radova. U£estovao je na konferencijama iz oblasti kombi- natorike, algebre i metodike nastave matematike. Istraºivanja ražena u okviru doktorske disertacije predstavljao je u Lyonu (Francuska), Zagrebu (Hrvatska), Beogradu (Srbija), Podgorici (Crna Gora), Berlinu i Heidelbergu (Njema£ka). 129 Izjava o autortstvu Potpisan Edin Ližan

Broj indeksa/upisa: 1 /2015 **Izjavljujem da je doktorska disertacija pod naslovom** 3

Topolo²ke karakteristike poplo£avanja generalisanih poliominima ˆ rezultat sopstvenog istraºiva£kog rada, ˆ da predloºena

disertacija ni u cjelini ni u dijelovima **nije bila** predloºena **za dobijanje bilo koje diplome prema studijskim programima drugih ustanova visokog obrazovanja** , ˆ **da su rezultati korektno** 2

navedeni, i ˆ **da** nisam **povrijedio autorska i druga prava intelektualne svojine koja pripadaju** tre¢im **licima. Potpis** doktoranta **U Podgorici**

, 6.12.2021.

Izjava o istovjetnosti ²tampane **i elektronske verzije doktorskog rada Ime i prezime autora** : Edin Ližan **Broj indeksa/upisa: 1** /2015 **Studijski program** : Matematika **Naslov rada** 3

: Topolo²ke karakteristike poplo£avanja generalisanih poliomi- nima Mentor: dr. sc. Đorže Barali¢ Potpisan Edin Ližan

Izjavljujem da je ²tampana **verzija mog doktorskog rada istovjetna** elektron- skoj **verziji koju sam predao za objavljivanje u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore. Istovremeno izjavljujem da dozvoljavam objavljivanje mojih** li£nih **podataka u vezi sa dobijanjem akademskog naziva doktora nauka, odnosno zvanja** do- ktora **umjetnosti, kao** ²to **su ime i prezime, godina i mjesto** roženja, **naziv disertacije i datum odbrane rada** . Potpis doktoranta **U Podgorici** , 6.12.2021. **Izjava o** 9

kori²tenju Ovla²¢

ujem Univerzitetsku biblioteku da u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore pohrani moju doktorsku disertaciju pod naslovom 27

: Topolo²ke karakteristike poplo£avanja generalisanih poliominima ,

koja je moje autorsko djelo. Disertaciju sa svim prilozima predao sam u elektronskom formatu pogodnom za trajno arhiviranje. Moju doktorsku disertaciju pohranjenu u Digitalni arhiv Univerziteta Crne Gore mogu da koriste svi koji po²tuju **odredbe** sadr°ane **u odabranom tipu licence Kreativne zajednice (Creative Commons) za koju sam se** odlu£io. **1. Autorstvo 2. Autorstvo** 3. **Autorstvo** 2

4. Autorstvo 5. Autorstvo 6.

Autorstvo nekomercijalno nekomercijalno **bez prerade nekomercijalno dijeliti pod istim uslovima bez prerade dijeliti pod istim uslovima** Potpis doktoranta **U** 10

Podgorici, 6.12.2021.

sources:

1 287 words / 1% - Internet from 29-Feb-2020 12:00AM
fedorabg.bg.ac.rs

2 101 words / < 1% match - Internet from 13-Jan-2022 12:00AM
www.ucg.ac.me

3 31 words / < 1% match - Internet from 06-Sep-2021 12:00AM
www.ucg.ac.me

4 63 words / < 1% match - Internet from 10-Aug-2020 12:00AM
mafiadoc.com

5 23 words / < 1% match - Internet from 18-Jul-2020 12:00AM
mafiadoc.com

6 20 words / < 1% match - Internet from 09-Aug-2020 12:00AM
mafiadoc.com

7 16 words / < 1% match - Internet from 15-Jul-2020 12:00AM
mafiadoc.com

8 105 words / < 1% match - Crossref
Golomb, Solomon, and David Klarner. "Polyominoes", Discrete Mathematics and Its Applications, 2004.

9 56 words / < 1% match - Internet from 08-Oct-2020 12:00AM
fedora.ucg.ac.me

10 16 words / < 1% match - Internet from 14-Jul-2021 12:00AM
fedora.ucg.ac.me

11 46 words / < 1% match - Internet from 23-Dec-2021 12:00AM
ebin.pub

12 40 words / < 1% match - Internet from 27-Sep-2021 12:00AM
www.icpe-ca.ro

13 23 words / < 1% match - Internet
Volarić, Martina. "Topološki aspekti aksioma potpunosti", University of Zagreb. Faculty of Science. Department of Mathematics., 2018

14 11 words / < 1% match - Internet
Baljkas, Lucija. "Izgradnja eksponencijalne funkcije", University of Zagreb. Faculty of Science. Department of Mathematics., 2014

15	20 words / < 1% match - Internet from 04-Jun-2015 12:00AM www.math.uniri.hr
16	14 words / < 1% match - Internet from 30-Jul-2015 12:00AM www.math.uniri.hr
17	16 words / < 1% match - Internet from 09-May-2019 12:00AM repository.tudelft.nl
18	16 words / < 1% match - Internet from 16-May-2019 12:00AM repository.tudelft.nl
19	30 words / < 1% match - Internet from 13-Dec-2021 12:00AM nozdr.ru
20	26 words / < 1% match - Internet Betancourt, Catalina. "Persistence heatmaps for knotted data sets", University of Iowa, 2018
21	24 words / < 1% match - Internet from 22-Jun-2021 12:00AM mayor.fri.uniza.sk
22	24 words / < 1% match - Internet from 22-Oct-2012 12:00AM www.ccs.neu.edu
23	23 words / < 1% match - Internet from 09-Dec-2021 12:00AM openarchive.nure.ua
24	21 words / < 1% match - Internet from 22-Sep-2021 12:00AM www.zora.uzh.ch
25	10 words / < 1% match - Internet Đaferović, Elma. "Hijerarhija konveksnih funkcija", University of Zagreb. Faculty of Science. Department of Mathematics., 2018
26	10 words / < 1% match - Internet from 07-Dec-2020 12:00AM repozitorij.pmf.unizg.hr
27	16 words / < 1% match - Internet Brajovic, Milos. "On reconstruction algorithms for signals sparse in Hermite and Fourier domains", 2019
28	16 words / < 1% match - Internet from 23-Mar-2016 12:00AM higeom.math.msu.su

29 15 words / < 1% match - Internet from 31-Jul-2014 12:00AM
www.coursehero.com

30 15 words / < 1% match - Internet from 05-Oct-2021 12:00AM
www.uclm.es

31 14 words / < 1% match - Internet from 17-May-2021 12:00AM
dr.library.brocku.ca

32 14 words / < 1% match - Internet from 05-Mar-2020 12:00AM
www.freepatentsonline.com

33 13 words / < 1% match - Internet from 08-Jan-2022 12:00AM
abakus.inonu.edu.tr

34 13 words / < 1% match - Internet from 23-Nov-2021 12:00AM
www.spiedigitallibrary.org

35 12 words / < 1% match - Internet from 31-Jan-2019 12:00AM
ar.scribd.com

36 12 words / < 1% match - Internet from 29-Jan-2019 12:00AM
www.758argus.ca

37 12 words / < 1% match - Internet from 18-Mar-2009 12:00AM
www.mathematik.uni-ulm.de

38 11 words / < 1% match - Crossref
Furutani, K.. "Determinant of Laplacians on Heisenberg manifolds", Journal of Geometry and Physics, 200311

39 11 words / < 1% match - Internet from 10-Apr-2020 12:00AM
math.sfsu.edu

40 11 words / < 1% match - Internet from 27-Nov-2008 12:00AM
www.micro2000uk.co.uk

41 11 words / < 1% match - Internet from 22-Mar-2016 12:00AM
www.ussc.gov

42 11 words / < 1% match - Internet from 16-Feb-2019 12:00AM
www.wuperbooks.org

43 11 words / < 1% match - Internet from 12-Sep-2021 12:00AM
zir.nsk.hr

44 10 words / < 1% match - Crossref
David F. Anderson, T. Asir, Ayman Badawi, T. Tamizh Chelvam. "Graphs from Rings", Springer Science and Business Media LLC, 2021

45 10 words / < 1% match - Crossref
Fahimeh Mokhtari, Jan A. Sanders. "Equivariant decomposition of polynomial vector fields", Communications in Contemporary Mathematics, 2020

46 10 words / < 1% match - Internet from 21-Oct-2021 12:00AM
dokumen.pub

47 10 words / < 1% match - Internet from 02-Jun-2020 12:00AM
fr.scribd.com

48 10 words / < 1% match - Internet
"Topologija", Wikipedia, hr, 2021

49 10 words / < 1% match - Internet from 19-Nov-2018 12:00AM
kntu.net.ua

50 10 words / < 1% match - Internet from 17-Apr-2016 12:00AM
www.emis.de

51 10 words / < 1% match - Internet from 08-Aug-2020 12:00AM
www.sciencesconf.org

52 10 words / < 1% match - Internet from 19-Nov-2006 12:00AM
www.stochastik.uni-freiburg.de

53 10 words / < 1% match - Internet from 15-May-2020 12:00AM
www.yumpu.com

54 10 words / < 1% match - Internet from 17-Mar-2012 12:00AM
www.zndx.cn